МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Белгородский государственный технологический университет
им. В. Г. Шухова

Кафедра информационных технологий

Утверждено
научно-методическим советом
университета

МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ И ПРОЦЕССОВ

Лабораторный практикум

Белгород
2017

УДК 004.9(075)
ББК 22.18 я7
И 20

Рецензенты: канд. техн. наук, доц. А.И. Штифанов
канд. техн. наук, доц. А.И. Полунин

Иванов, И.В.
И 20 Моделирование систем и процессов: лабораторный практикум: учебное пособие / И.В. Иванов, М.А. Косоногова. - Белгород: Изд-во БГТУ, 2017. - 67 с.

Учебное пособие содержит описание основных практических методов имитационного и регрессионного моделирования сложных систем и процессов, а также варианты заданий для выполнения лабораторного практикума. В издание включен справочный материал по моделированию случайных объектов и статистической оценке полученных моделей.

Книга предназначена для студентов, обучающихся по направлениям укрупненной группы подготовки 09 – Информатика и вычислительная техника.

Издание публикуется в авторской редакции.

УДК 004.9(075)
ББК 22.18 я7

ВВЕДЕНИЕ

Лабораторный практикум охватывает дисциплины «Моделирование систем» и «Математическое моделирование производственных процессов». Дисциплины входят в состав федеральной компоненты цикла общепрофессиональных дисциплин направлений бакалавриата «Информационные системы и технологии» и «Прикладная информатика», соответственно. Целью изучения данных дисциплин является ознакомление с принципами моделирования сложных систем и процессов, реализующих новые информационные технологии. В качестве инструмента моделирования студент может выбрать любой из универсальных языков программирования. Для каждой из лабораторных работ в настоящем издании приводятся краткие сведения теоретического и практического плана, необходимые для понимания смысла задания по данной работе и предъявляемых в ходе данной работы требований. Затем дается порядок выполнения лабораторной работы и содержание отчета. Задания разбиты на несколько уровней: обязательные для освоения программы и факультативные. В методических целях приводится сквозной пример выполнения и оформления лабораторной работы, а также контрольные вопросы для защиты лабораторной работы. Издание также содержит расчетно-графическое задание, которое предполагает использование инструментальных средств моделирования.

Все задания лабораторных работ представляют собой модели ***систем массового обслуживания*** (СМО) различной природы. Задачи массового обслуживания возникают тогда, когда ряд ***приборов*** обслуживает поступающие на их вход ***заявки*** (требования на обслуживание). Заявками могут быть люди, стоящие в очереди в магазине, детали, поступающие на обработку в цех, транспортные средства, перевозящие грузы и т.п., а приборами, обслуживающими заявки в этих случаях, соответственно являются продавцы магазина, обрабатывающие станки, механизмы и персонал, осуществляющий погрузочно-разгрузочные работы и т.п. В качестве характеристик эффективности СМО – в зависимости от условий задачи и целей исследования – могут применяться различные величины и функции: средний процент заявок, получивших отказ в обслуживании; среднее время простоя отдельных каналов и системы в целом; среднее время ожидания заявок в очереди; вероятность того, что поступившая заявка будет обслужена немедленно; закон распределения длины очереди и т.д.

Лабораторные работы являются относительно самостоятельными фрагментами, но объединены с другими единым сюжетом задачи и используют результаты выполнения предыдущих работ. Итогом лабораторных работ должна стать программа, моделирующая функционирование заданной системы массового обслуживания с учетом наличия случайностей в системе, а также результаты экспериментирования с цифровой моделью и оптимизации режимов работы системы.

Расчетно-графическое задание по сюжету соответствует первой и второй лабораторным работам, но выполняется с использованием пакетов моделирования, а не на базе универсальных языков программирования. Итогом РГЗ должен стать проект, моделирующий и визуализирующий функционирование заданной СМО с учетом случайностей.

Лабораторная работа № 1.
Построение имитационных моделей систем массового обслуживания

Цель работы: построение имитационной модели системы массового обслуживания, параметры которой являются детерминированными величинами.

Содержание работы

Для выполнения первой лабораторной работы необходимо внимательно ознакомиться с текстовым описанием СМО, определить состав обслуживающих устройств, выяснить, что является заявками, обратить внимание на дисциплину обслуживания, т.е. каким образом требования поступают на обработку: живая очередь (первым пришел - первым обслужился), стековая форма (последним пришел – первым обслужился), обслуживание по степени срочности, по шкале приоритетов и т.п. Затем нужно составить графическую схему СМО с указанием потоков движения заявок. Графическая схема СМО поможет провести декомпозицию системы, исследовать функциональные действия и события, происходящие в системе, определить их последовательность и взаимосвязь и на основании этого составить список активностей имитационной модели заданного объекта.

Активность имитационной модели – это ее фрагмент, предназначенный для моделирования определенного функционального действия в реальной системе. Если функциональное действие можно считать мгновенным, то оно моделируется одной активностью, если же функциональное действие имеет временную протяженность, которой нельзя пренебречь, то оно, как правило, моделируется двумя активностями – начало действия и завершение действия. Каждая активность содержит в себе условие запуска и алгоритм. Если условие запуска (некоторый логический предикат) принимает истинное значение, то выполняется алгоритм активности, в противном случае производится переход к другой активности в соответствии с выбранным способом моделирования.

Исходя из характера СМО, необходимо определить наиболее подходящий способ моделирования системы - путем просмотра активностей, составления расписания событий, управления обслуживания транзактов, агрегатного описания или синхронизации процессов. Для заданной СМО требуется выбрать метод изменения модельного времени - потактовое моделирование или путем просмотра особых состояний. Для потактового способа моделирования надо задать величину шага изменения модельного времени, который рекомендуется выбирать на порядок меньше самого малого временного интервала в условии задачи.

В первом разделе лабораторного практикума СМО считается детерминированной, т. е. предполагается, что заявки поступают и обрабатываются строго в определенные моменты времени, а параметры заявок и характеристики приборов СМО также неизменны во времени. Это весьма условное допущение, но на первом этапе моделирования необходимое. Таким образом, при моделировании первой части практикума все параметры задачи считаются постоянными и задаются в программе константами. Указанные параметры заданы в абзаце ***Данные для детерминированной модели СМО*.**

Результатом работы программы является ***протокол моделирования*** – таблица, где в каждый модельного времени выводятся текущие значения параметров системы, по которым можно судить о ее функционировании: длины очередей перед приборами, состояние приборов (занят/свободен), поступление и уничтожение заявок и т.д.

Порядок выполнения работы

1. Получить вариант задания и внимательно ознакомиться с текстовым описанием СМО.
2. Составить графическую схему СМО.
3. Выбрать наиболее подходящие методы управления модельным временем и организации квазипараллелизма.
4. Составить список активностей модели СМО и блок-схему алгоритма моделирования.
5. Реализовать имитационную модель средствами вычислительной техники с использованием любого универсального языка программирования, получить протокол моделирования при детерминированных параметрах модели СМО.

Содержание отчета

Отчет должен содержать:

- постановку задачи;
- графическую схему СМО;
- список и содержание активностей СМО;
- блок-схему алгоритма моделирования;

- текст программы для ЭВМ;
- протокол моделирования.

Контрольные вопросы

1. Сущность и основные понятия имитационного моделирования: имитационная модель, компоненты, параметры, функциональные зависимости, ограничения, целевые функции. Круг задач, решаемых с использованием имитационного моделирования.
2. Понятие модельного времени. Синхронизация событий в имитационной модели и методы изменения модельного времени.
3. Способы организации квазипараллелизма в имитационных моделях: основные характеристики и области применения.
4. Понятие активности.
5. Технологические этапы создания и использования имитационных моделей.

Пример

Задание. В смеситель периодического действия поступает порция воды $\mathbf{N_1}$ (м^3), песка $\mathbf{N_2}$ (м^3), цемента $\mathbf{N_3}$ (м^3) и красителя $\mathbf{N_4}$ (м^3). Компоненты смеси поступают из бункеров-дозаторов, которые непрерывно заполняются со скоростями $\mathbf{W_1}$ (м^3/мин), $\mathbf{W_2}$ (м^3/мин), $\mathbf{W_3}$ (м^3/мин), $\mathbf{W_4}$ (м^3/мин) соответственно. Время смешивания $\mathbf{t}$ (мин), после чего смесь выгружается из смесителя. Если какой-либо бункер заполнен, то подача компонентов в него прекращается. Если к моменту прекращения смешивания и разгрузки смесителя в каком-либо бункере нет достаточной порции компонента, система ожидает достаточного заполнения соответствующего бункера. Объемы бункеров $\mathbf{V_1}$ (м^3), $\mathbf{V_2}$ (м^3), $\mathbf{V_3}$ (м^3), $\mathbf{V_4}$ (м^3). Влажности песка, цемента и красителя $\boldsymbol{\eta_2}$ (%), $\boldsymbol{\eta_3}$ (%), $\boldsymbol{\eta_4}$ (%). Смесь с влажностью **[18,5%...19,5%]** считается хорошей, с влажностью **[18%...18,5%]** и **[19,5%...20%]** -удовлетворительной, с прочей влажностью - неудовлетворительной. Смоделировать работу смесителя в течение суток.

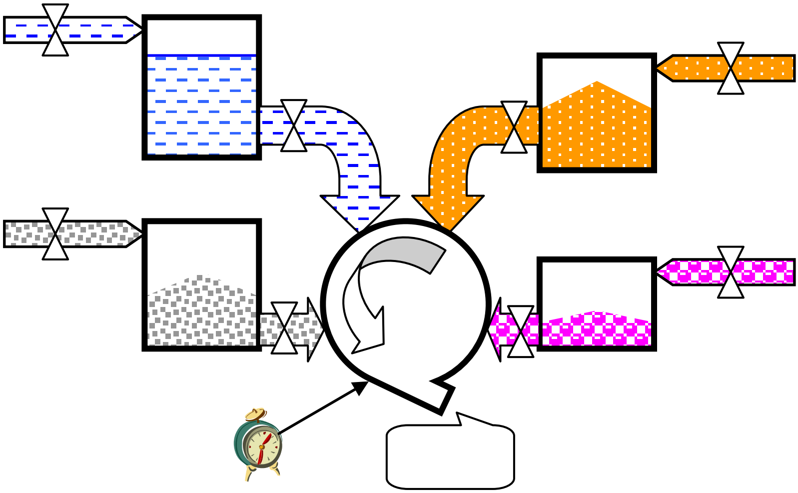
Данные для детерминированной модели СМО: $\mathbf{W_1 = 0,1}$, $\mathbf{W_2 = 0,2}$, $\mathbf{W_3}$ **- 0,3** ; $\mathbf{W_4 = 0,1}$, $\mathbf{V_1 = 10}$, $\mathbf{V_3 = 10}$, $\mathbf{V_3 = 10}$, $\mathbf{V_4 = 10}$, $\mathbf{t = 10}$, $\mathbf{N_1 = 1,5}$, $\mathbf{N_2 = 2}$, $\mathbf{N_3 = 3,5}$, $\mathbf{N_4 = 1,5}$, $\boldsymbol{\eta_2 = 5}$, $\boldsymbol{\eta_3 = 1}$, $\boldsymbol{\eta_4 = 2}$.

Данные для стохастической модели СМО: скорости $\mathbf{W_1}$, $\mathbf{W_2}$, $\mathbf{W_3}$, $\mathbf{W_4}$ распределены нормально с параметрами $\mathbf{m_1 = 0,1}$, $\mathbf{m_2 = 0,2}$, $\mathbf{m_3 = 0,3}$, $\mathbf{m_4 = 0,1}$, $\boldsymbol{\sigma_1 = 0,01}$, $\boldsymbol{\sigma_2 = 0,02}$, $\boldsymbol{\sigma_3 = 0,03}$, $\boldsymbol{\sigma_4 = 0,01}$, время смешивания распределено показательно с параметром $\boldsymbol{\lambda = 0,1}$; возмущающими параметрами являются влажности η_2, η_3, η_4, представляющие стационарные случайные процессы с нормальными законами распределения и интервалами разброса **[3...7]**, **[0,5...3]** и **[0,5...5]** соответственно.

Варьируемые параметры: объемы бункеров V_1, V_2, V_3, V_4.

Показатели работы: производительность системы, стоимость смеси, качество смеси.

Составим условную графическую схему СМО:



Система массового обслуживания «Смеситель периодического действия» состоит из смешивающего барабана и четырех бункеров. От каждого бункера проложен продуктопровод к барабану, к каждому бункеру подведен продуктопровод от внешних источников сырья. На продуктопроводах, подводящих сырье к бункерам, расположены вентили, которые прекращают наполнение бункеров, если последние заполнены. На продуктопроводах, подводящих компоненты смеси к барабану, расположены дозирующие вентили, регулирующие поступление сырья в барабан. Имеется таймер, определяющий время смешивания.

В системе наблюдаются следующие функциональные действия:
ФД1-ФД4: наполнение бункеров 1-4;
ФД5: загрузка компонент в барабан;
ФД6: перемешивание компонент в барабане;
ФД7: выгрузка готовой смеси из барабана.

В состав модели включим следующие активности:
Ак1-Ак4: наполнение бункеров 1-4;
Ак56: загрузка компонент в барабан и начало смешивания;
Ак67: завершение смешивания и выгрузка готовой смеси из барабана.
Введем величины t_0 – модельное время и Δt – шаг моделирования (мин).

Содержание активностей.
Ак1.
Условие запуска УЗ1:
Текущее_количество_компоненты_в_бункере_1 < V_1.
Алгоритм Ал1:
Текущее_количество_компоненты_в_бункере_1 :=
Текущее_количество_компоненты_в_бункере_1 + $W_1 \cdot \Delta t$

Активности Ак2 – Ак4 имеют аналогичное содержание.

Ак56.
Условие запуска УЗ56:
(Текущее_количество_компоненты_в_бункере_1 ≥ N_1) ∧ (Текущее_количество_компоненты_в_бункере_2 ≥ N_2) ∧ (Текущее_количество_компоненты_в_бункере_3 ≥ N_3) ∧ (Текущее_количество_компоненты_в_бункере_4 ≥ N_4) ∧ (Состояние_барабана = Простаивает).
Алгоритм Ал56:
Текущее_количество_компоненты_в_бункере_1
:= Текущее_количество_компоненты_в_бункере_1 - N_1
Текущее_количество_компоненты_в_бункере_2
:= Текущее_количество_компоненты_в_бункере_2 – N_2
Текущее_количество_компоненты_в_бункере_3
:= Текущее_количество_компоненты_в_бункере_3 – N_3
Текущее_количество_компоненты_в_бункере_4
:= Текущее_количество_компоненты_в_бункере_4 – N_4
Состояние_барабана := Смешивает
Время_завершения_смешивания := t_0 + t

Ак67.
Условие запуска УЗ67:
t_0 ≥ Время_завершения_смешивания
Алгоритм Ал67:
Состояние_барабана := Простаивает

Влажность_смеси :=
$(N_1 + \eta_2 \cdot N_2/100 + \eta_3 \cdot N_3/100 + \eta_4 \cdot N_4/100)/(N_1 + N_2 + N_3 + N_4) \cdot 100$
Вызов **Процедуры_сбора_статистики**

Квазипараллелизм организуем методом просмотра активностей, так как количество компонент реальной системы не изменяется в течение моделирования. Модельное время будем изменять с фиксированным шагом **Δt** = 1 мин.

Блок-схема алгоритма моделирования представляет собой цикл по переменной **t_0** с шагом **Δt**. В цикле последовательно вызываются активности Ак1, АК2, Ак3, Ак4, Ак56, Ак67. Цикл завершается по прошествии одних суток модельного времени.

Протокол моделирования имеет следующий вид.

t_0 (мин)	**Текущее_количество_компоненты_в_бункере_1**	**Текущее_количество_компоненты_в_бункере_2**	**Текущее_количество_компоненты_в_бункере_3**	**Текущее_количество_компоненты_в_бункере_4**	**Состояние_барабана**	**Выгрузка смеси**
0	0.0	0.0	0.0	0.0	Простаивает	
1	0.1	0.2	0.3	0.1	Простаивает	
2	0.2	0.4	0.6	0.2	Простаивает	
…	…	…	…	…	…	
15	1.5	3.0	4.5	1.5	Простаивает	
…	…	…	…	…	…	
25	0.9	2.8	3.7	0.9	Смешивает	Готова порция
26	1.0	3.0	4.0	1.0	Простаивает	
…	…	…	…	…	…	
31	1.5	4.0	5.5	1.5	Простаивает	
…	…	…	…	…	…	

Лабораторная работа № 2.
Моделирование случайных независимых величин

Цель работы: уточнение имитационной модели СМО посредством моделирования случайных величин, характеризующих параметры заявок и режимы функционирования устройств их обработки в реальной сложной системе.

Содержание работы

Данная работа посвящена моделированию случайных независимых величин. Необходимо обратить внимание на законы распределения случайных величин, на которые ссылается текст задания (абзац ***данные для стохастической модели***). В первом разделе практикума эти величины задавались константами. Во второй части практикума соответствующие операторы программы, определяющие значения констант, заменяются обращениями к процедурам, моделирующим заданный закон распределения.

Программная генерация случайной величины с равномерным законом распределения на интервале **[*0, 1*]** основывается на рекуррентном соотношении $x_{i+1} = F(x_i)$, где $x_o, x_1, \ldots, x_n$ - получаемая последовательность случайных чисел, равномерно распределенных на интервале **[*0, 1*]**. В зависимости от вида $F(x)$ существуют разные методы генерации случайных чисел, но наиболее часто используются методы ***магических формул, серединных квадратов, иррационального числа, конгруэнтный метод.*** В большинстве универсальных языков программирования (Basic, Pascal, все диалекты С) и во всех специализированных средствах компьютерного моделирования имеются встроенные функции генерации случайных чисел, равномерно распределенных на интервале **[*0, 1*]**. Для получения последовательностей случайных чисел, подчиненных иным законам распределения, можно воспользоваться методом ***обратной функции*** или другими методами.

Если $\{x_i\}$ – последовательность, равномерно распределенная на интервале ***[0, 1],*** то последовательность $\{y_i\}$, подчиненную закону распределения с плотностью вероятности $f(y)$, можно получить с использованием соотношений, представленных в таблице.

Моделирование некоторых законов распределения

Закон распределения	Плотность вероятности (функция вероятности)	Математическое ожидание	Расчетная формула для моделирования
Равномерное распределение на интервале **[a, b]**	$\mathbf{f(y) = \frac{1}{a-b}}$	$\mathbf{\frac{a+b}{2}}$	$\mathbf{y_i = a + (b-a)x_i}$
Показательное распределение	$\mathbf{f(y) = \lambda e^{-\lambda y}}$	$\mathbf{\frac{1}{\lambda}}$	$\mathbf{y_i = -\frac{1}{\lambda}\ln(x_i)}$
Нормальное распределение (Гаусса)	$\mathbf{f(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}}}$	$\mathbf{m}$	$\mathbf{y_i = \sigma\ \cos(2\pi x_i)\sqrt{-2\ln(x_i^*)} + m}$
Распределение СМО	$\mathbf{f(y) = \lambda(1 - \frac{\lambda y}{2})}$	$\mathbf{\frac{2}{3\lambda}}$	$\mathbf{y_i = \frac{2}{\lambda}(1 - \sqrt{x_i})}$
Распределение Релея	$\mathbf{F(y) = 1 - e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}}$	$\mathbf{\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$	$\mathbf{y_i = \sigma\sqrt{-2\ln x_i}}$
	$\mathbf{f(y) = \frac{c}{(1 + b \cdot y)^2}}$	$\mathbf{\frac{1}{2c-b}}$	$\mathbf{y_i = \frac{x_i}{c - b \cdot x_i}}$

Таким образом, любой генератор последовательности случайных чисел, распределенных по некоторому закону, отличному от равномерного, в своей основе содержит минимум один генератор базовой последовательности, равномерно распределенной на интервале ***[0, 1].***

Если быть точным, то любой программный генератор выдает последовательность не случайных, а псевдослучайных чисел, поэтому для достоверности получаемых при моделировании результатов необходимо: во-первых, использовать в генераторах разных случайных величин независимые базовые генераторы; во-вторых, все генераторы случайных чисел должны пройти предварительное тестирование, которое заключается в следующем.

1. ***Тестирование по гистограмме***. Проверяется соответствие полученной последовательности - ***статистического ряда*** из N чисел $\{y_1, y_2,...,y_N\}$ теоретическому закону распределения. Интервал возможных значений последовательности $[\mathbf{y_{min}}...\mathbf{y_{max}}]$ разбивается на $\mathbf{m}$ равных частей $[y_1; y_2]...[y_j;y_{j+1}]...[y_{N-1}; y_N]$ каждая шириной $\Delta\mathbf{y} = (\mathbf{y_{max}} - \mathbf{y_{min}})/\mathbf{m}$. При этом рекомендуется, чтобы $\mathbf{m} \geq 20$, $\mathbf{N} \geq \mathbf{m}\cdot 10^2$. Если в каждый i-тый интервал попадает $\mathbf{N_i}$ чисел ряда, то вероятность попадания можно статистически оценить величиной $\mathbf{P_i^{ст}} = \dfrac{\mathbf{N_i}}{\mathbf{N}}$. Для отображения этой величины на графике строится прямоугольник с шириной $\Delta\mathbf{y}$ и высотой $\mathbf{h_i} = \dfrac{\mathbf{P_i^{cm}}}{\Delta\mathbf{y}}$. Таким образом, получается кусочно-непрерывная функция плотности распределения статистического ряда, называемая ***гистограммой.*** Гистограмма плотности распределения статистического ряда должна максимально приближаться к теоретической кривой плотности распределения по внешнему виду. Степень рассогласования статистического ряда, полученного программным генератором, и теоретического закона, определенного в задании, можно оценить, сравнив статистические оценки матожидания и среднеквадратического отклонения с заданными параметрами закона распределения.

Оценка матожидания вычисляется так:

$$\overline{\mathbf{m_y}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{N}}\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}} \mathbf{y_i} \,.$$

Оценка среднеквадратичного отклонения вычисляется так:

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{y}}^{\mathbf{2}}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{N-1}}\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}} (\mathbf{y_i} - \overline{\mathbf{m_y}})^2 \,.$$

2. ***Тестирование по критериям согласия***. Позволяет оценить степень соответствия гистограммы и теоретической плотности распре-

деления с точки зрения проверки статистической гипотезы об их идентичности. При использовании критерия согласия Колмогорова на графике теоретической функции распределения *F(y)* строится кусочно-непрерывная статистическая функция распределения следующего вида: $\mathbf{F^{ст}(y_k) = \sum_{i=1}^{k} P_i^{ст}, k = 1, 2... N}$. Далее определяются величины $\mathbf{D = \max|F^{ст}(x) - F(x)|, \lambda = D\sqrt{N}}$ и вероятность $\mathbf{p(\lambda)}$ истинности гипотезы о соответствии статистического ряда, полученного с помощью генератора, требуемому закону распределения. Искомая вероятность определяется либо по таблице (см. Приложение), либо по формуле $p(\lambda) = 1 - \sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^k e^{-k^2\lambda^2}$.

При использовании критерия согласия χ^2-Пирсона по гистограмме вычисляется $\mathbf{\chi^2_{\beta,p} = N\sum_{i=1}^{m}\frac{(P_i^{ст} - P_i)^2}{P_i}}$, где $\mathbf{P_i}$ – теоретические вероятности попаданий в интервалы $\mathbf{P_i = \int_{y_{i-1}}^{y_i} f(y)dy, i = 1, 2,..., m}$. Далее определяется число степеней свободы $\beta = m - r - 1$, где *r* – число известных параметров в теоретической плотности распределения (например, для нормального закона распределения с известными математическим ожиданием и среднеквадратичным отклонением *r = 2)*. Затем задаются некоторым $\mathbf{p}$ и по таблице распределения χ^2 (см. Приложение) определяется $(\chi^2_{\beta,p})^{табл}$. Если $\chi^2_{\beta,p} \le (\chi^2_{\beta,p})^{табл}$ статистическая гипотеза верна с вероятностью не менее, чем **p**.

3. ***Тестирование по корреляционному моменту.*** Позволяет проверить независимость элементов случайной последовательности. Это необходимо, поскольку программный генератор случайных чисел может «зацикливаться» с некоторым интервалом апериодичности. Для проверки коррелированности элементов полученной псевдослучайной последовательности $\mathbf{\{y_1, y_2, …, y_N\}}$ для нескольких произвольных значений τ вычисляются корреляционные моменты

$$\mathbf{K_y(\tau) = \frac{1}{N-\tau}\sum_{i=1}^{N-\tau}(y_i \cdot y_{i+\tau}) - \frac{1}{(N-\tau)^2}\sum_{i=1}^{N-\tau}(y_i)\cdot\sum_{i=1}^{N-\tau}(y_{i+\tau})}.$$

Если при всех τ выполняется неравенство $|\mathbf{K_y(\tau)}| \le \mathbf{(1-p)}\sqrt{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{N}}}$, то элементы последовательности независимы с вероятностью не менее, чем **p**.

Порядок выполнения работы

1. В соответствии с условием задания определить параметры законов распределения, которым подчинены случайные величины.
2. Для каждой случайной величины разработать программный модуль, генерирующий соответствующую псевдослучайную последовательность.
3. Для каждой случайной величины произвести тестирование программного генератора (по гистограмме и критерию χ^2-Пирсона) и убедиться в соответствии генерируемой последовательности заданию.

Факультативно: тестирование программных генераторов дополнить критерием согласия Колмогорова и проверкой коррелированности генерируемых элементов псевдослучайно последовательности.

4. Включить генераторы случайных величин в полученную ранее имитационную модель и произвести моделирование СМО в условиях случайного изменения параметров имитационной модели.

Содержание отчета

Отчет должен содержать:

- аналитическую запись заданных законов распределения случайных величин с указанием конкретных параметров законов распределения;
- тексты процедур моделирования случайных величин;
- результаты тестирования процедур моделирования случайных величин;
- протокол моделирования СМО в условиях случайных изменений параметров.

Контрольные вопросы

1. Случайные величины и их основные характеристики. Наиболее распространенные законы распределения случайных величин.
2. Основные методы генерации случайных величин (аппаратный, табличный, программный) и их сравнительные характеристики.
3. Возможные погрешности программных генераторов и методы их

устранения. Способы оценки качества генераторов псевдослучайных последовательностей.

4. Статистические гипотезы, виды, статистических гипотез. Критерии согласия для проверки статистических гипотез: критерии согласия Колмогорова, χ^2-Пирсона. Сравнительные характеристики, достоинства, недостатки, области применения.

Пример

В смесителе периодического действия наблюдаются пять случайных величин, четыре из которых распределены по нормальному закону и одна – по экспоненциальному. Функции плотности вероятностей указанных величин следующие:

$$\mathbf{f(W_1)=\frac{1}{0.01\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(W_1-0.1)^2}{0.0002}}}$$

$$\mathbf{f(W_2)=\frac{1}{0.02\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(W_2-0.2)^2}{0.0008}}}$$

$$\mathbf{f(W_3)=\frac{1}{0.03\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(W_3-0.3)^2}{0.0018}}}$$

$$\mathbf{f(W_4)=\frac{1}{0.01\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(W_4-0.1)^2}{0.0002}}}$$

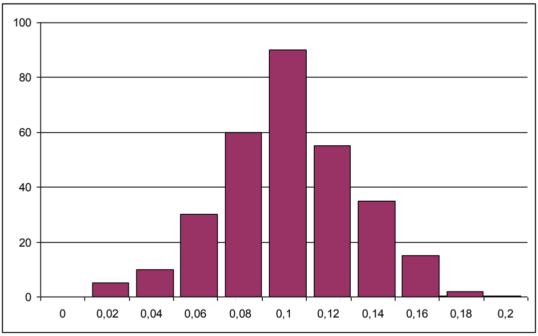
$$\mathbf{f(t)=0.1e^{-0.1t}}$$

Построим две функции, моделирующие нормальный закон распределения (**Normal(m,s)**) и показательный закон (**Exponent(L)**).

```
Function Normal(m,s:real):real;
begin
        Normal:=…;
end;
Function Exponent(L:real):real;
begin
        Exponent:=…;
end;
```

Фрагмент последовательности случайных чисел: 0.01, 0.011, 0.008, …

По результатам генерации последовательности псевдослучайных чисел W_1 построим гистограмму, используя инструменты MS Excel.



Внешний вид гистограммы соответствует нормальному закону распределения.

Сравним заданные и полученные моделированием параметры закона распределения.

По заданию $M[W_1] = m_1 = 0.1$

По результатам моделирования $\overline{\mathbf{m_1}} =$ …

По заданию $D[W1] = \boldsymbol{\sigma_1}^2 = 0.0001$

По результатам моделирования $\overline{\boldsymbol{\sigma_1^2}} =$ …

Далее выполняется проверка критериев Колмогорова, Пирсона, а также проверка согласия по корреляционному моменту.

Выполняется моделирование системы массового обслуживания с включенным генератором случайных чисел. Выводится протокол моделирования.

Лабораторная работа № 3.
Моделирование случайных процессов

Цель работы: уточнение имитационной модели СМО посредством моделирования возмущающих воздействий, действующих на реальную сложную систему.

Содержание работы

В данной лабораторной работе необходимо смоделировать возмущающие воздействия (помехи), действующие на СМО, которые описываются стационарными случайными процессами.

Для моделирования случайного стационарного процесса *Y(t)* надо, прежде всего, задать корреляционную функцию процесса, которая отражает степень статистической зависимости между сечениями стационарного случайного процесса, отстоящими друг от друга во времени на величину τ . Пусть корреляционная функция имеет вид $K_y(\tau) = ae^{-b\tau}$, где *a, b* -неизвестные пока параметры, которые необходимо определить, исходя из условия задания.

В точке $\tau = 0$ выполняется условие $K_y(0) = a$. Из статистической теории известно, что $K_y(0) = D_y$, где D_y - дисперсия случайного процесса. При нормальном законе распределения в сечениях стационарного случайного процесса разброс случайного процесса *Y(t)* обычно не превышает величины $6\sigma_y$ (это очевидно, исходя из известного правила «трех сигма»), где $\sigma_y = \sqrt{D_y}$ - среднеквадратичное отклонение. Таким образом, если все реализации стационарного случайного процесса *y(t)* находятся внутри некоторого интервала $[y_{min}, y_{max}]$ – ***интервала разброса***, т.е. $\forall y(t) \wedge \forall t \; y(t) \in [y_{\min}; y_{\max}]$, то $6\sigma_y = y_{\max} - y_{\min}$ и $a = D_y = \sigma_y^2 = \left(\frac{y_{\max} - y_{\min}}{6}\right)^2$.

Параметр *b* характеризует скорость убывания корреляционной зависимости с увеличением временного интервала между сечениями процесса. Обычно принимают, что если при каком-то значении $\tau \geq \tau_{гр}$ выполняется условие $K_y(\tau) \leq 0{,}05 K_y(0)$, то значения процесса, отстоящие друг от друга по времени больше чем на $\tau_{гр}$, можно считать некоррелированными. В учебных целях примем, что сечения случайного процесса, отстоящие друг от друга во времени более, чем на три шага моделирования, считаются некоррелированными, т.е. $\tau_{гр} = 3\Delta t$, где Δt - величина шага моделирования (минимальное приращение модельного времени). Таким образом, $K_y(3\Delta\tau) \leq 0{,}05a$, откуда $ae^{-b \cdot 3\Delta t} \leq 0{,}05a \Rightarrow b \geq -\frac{\ln 0{,}05}{3\Delta t}$.

Получив аналитически корреляционную функцию, описывающую стационарный случайный процесс, воспользуемся для его моделирования методом скользящего суммирования, согласно которому значения стационарного случайного процесса *Y(t)* с заданной корреляционной функцией $K_y(\tau)$ и математическим ожиданием $\mathbf{M_y}$ находятся по формулам:

$$\begin{cases} y(0) = C_0 q_0 + C_1 q_1 + \ldots C_m q_m + M_y, \\ y(\Delta t) = C_0 q_1 + C_1 q_2 + \ldots C_m q_{m+1} + M_y, \\ y(2\Delta t) = C_0 q_2 + C_1 q_3 + \ldots C_m q_{m+2} + M_y, \\ \ldots \\ y(i\Delta t) = C_0 q_i + C_1 q_{i+1} + \ldots C_m q_{m+i} + M_y, \\ \ldots \end{cases} \tag{3.1}$$

где $\boldsymbol{y(i\overline{\Delta t})}$ - значение возмущения на очередном i-м шаге моделирования; $\boldsymbol{q_i}$ - случайные нормально распределенные величины с нулевым математическим ожиданием $\boldsymbol{m_q = 0}$ и единичной дисперсией $\boldsymbol{\sigma_q^2 = 1}$,

$\mathbf{M_y = \dfrac{y_{max} + y_{min}}{2}}$ - математическое ожидание стационарного случайного процесса; $\boldsymbol{C_0, C_1 \ldots C_m}$ - константы, которые определяются системой (3.2) нелинейных уравнений $\boldsymbol{(m+1)}$ порядка:

$$\begin{cases} \mathbf{K_y(0) = \sum_{j=0}^{m} C_j^2,} \\ \mathbf{K_y(\Delta t) = \sum_{j=0}^{m-1} C_j C_{j+1},} \\ \mathbf{K_y(2\Delta t) = \sum_{j=0}^{m-2} C_j C_{j+2},} \\ \ldots \\ \mathbf{K_y(m\Delta t) = C_0 C_m.} \end{cases} \tag{3.2}$$

Поскольку ранее было принято допущение о некоррелированности сечений случайного процесса, отстоящих друг от друга во времени более чем на три шага моделирования, то $\mathbf{m = 3}$. Соответственно, система (3.2) состоит из четырех уравнений. Моделирование случайного процесса сводится к вычислению величин $y(i\Delta t)$ по формулам (3.1). Обратите внимание, что для вычисления очередного значения $y(i\Delta t)$ требуется получить одну новую величину $\mathbf{q_{i+m}}$ и использовать $\mathbf{m}$ предыдущих $\mathbf{q_i, q_{i+1},\dots, q_{i+m-1}}$.

Качество генератора стационарного случайного процесса проверяется следующим образом. Генерируется совокупность значений стационарного случайного процесса: $\mathbf{y(0)}$, $\mathbf{y(\Delta t)}$, $\mathbf{y(2\Delta t)}$... $\mathbf{y(i\Delta t)}$... $\mathbf{y(N\Delta t)}$, которая затем разбивается на две совокупности $\{\mathbf{y'_i}\}$, $\{\mathbf{y''_i}\}$ по следующему принципу. Значения стационарного случайного процесса на четных шагах модельного времени **i=0,2,4...** образуют статистический ряд $\{\mathbf{y''_1,y''_2,\dots,y''_{N/2}}\}$. Значения стационарного случайного процесса на нечетных шагах модельного времени **i = 1,3,5...** образуют статистический ряд $\{\mathbf{y'_1,y'_2,\dots,y'_{N/2}}\}$. Размеры каждой из выборок: $\mathbf{N'=N/2}$ **и** $\mathbf{N''=N/2}$ (желательно, чтобы $(\mathbf{N \geq 10^3})$. Далее эти две выборки анализируются при помощи следующих критериев согласия.

1. Критерий согласия Стьюдента. Проверяется статистическая гипотеза о том, что математические ожидания двух выборок $\{\mathbf{y'_i}\}$и $\{\mathbf{y''_i}\}$ совпадают. Находим оценки математических ожиданий и дисперсий выборок:

$$\mathbf{m'=\frac{1}{N'}\sum_{i=1}^{N'}y'_i,\ m''=\frac{1}{N''}\sum_{i=1}^{N''}y''_i,\ D'=\sum_{i=1}^{N'}\frac{(y'_i-m')^2}{N'-1},D''=\sum_{i=1}^{N''}\frac{(y''_i-m'')^2}{N''-1}}.$$

Затем вычисляются две величины

$$\mathbf{D=\frac{(N'-1)D'+(N''-1)D''}{N-2},\ t_{\beta,p}=\sqrt{\frac{(m'-m'')^2\cdot N'\cdot N''}{D\cdot N}}}.$$

Для числа степеней свободы $\boldsymbol{\beta = N-2}$ и некоторого **p** (обычно p=0.8…0.9) по таблице распределения Стьюдента находим $\mathbf{t^{табл}_{\beta,p}}$. Если $\mathbf{t_{\beta,p} \leq t^{табл}_{\beta,p}}$, то статистическая гипотеза верна с вероятностью не менее, чем **p**.

2. Критерий согласия Фишера. Проверяется статистическая гипотеза о том, что дисперсии двух выборок $\{\mathbf{y'_i}\}$ и $\{\mathbf{y''_i}\}$ совпадают. Математические ожидания $\mathbf{m'}$, $\mathbf{m''}$ и дисперсии $\mathbf{D'}$, $\mathbf{D''}$ выборок находятся так же, как и в случае применения критерия Стьюдента. Затем вычисляется отношение дисперсий

$$\mathbf{F}_{\beta_1,\beta_2,a} = \begin{cases} \mathbf{D'/D'', \text{если}\, D' \geq D'',} \\ \mathbf{D''/D', \text{если}\, D' < D''.} \end{cases}$$, а также число степеней свободы распределения Фишера $\boldsymbol{\beta_1 = N' - 1, \beta_2 = N'' - 1}$. Затем задаются уровнем значимости $\boldsymbol{\alpha}$ и по таблицам распределения Фишера находят $\mathbf{F}^{\mathbf{табл}}_{\beta_1,\beta_2,a}$.Если $\mathbf{F}_{\beta_1,\beta_2,a} \leq \mathbf{F}^{\mathbf{табл}}_{\beta_1,\beta_2,a}$, то статистическая гипотеза истинна с вероятностью не менее, чем $\mathbf{p=1 - \alpha}$. Обычно задаются уровнем значимости $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0.05}$.

Порядок выполнения работы

Лабораторная работа является факультативной.

1. Построить корреляционную функцию $\mathbf{K_y(}\tau\mathbf{)}$ стационарного случайного процесса ***Y(t).***
2. Решить систему уравнений (3.2) при $\boldsymbol{m=3}$ и найти коэффициенты $\boldsymbol{C_0,C_1,\dots,C_m}$.
3. Разработать процедуру, генерирующую нормально распределенные случайные числа $\boldsymbol{q_i}$ с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.
4. Реализовать генератор, реализующий вычисления значений стационарного случайного процесса в соответствии с методом скользящего суммирования согласно системе уравнений (3.1).
5. Произвести тестирование генератора стационарного случайного процесса, используя критерии согласия Стьюдента и Фишера.
6. Включить генератор стационарного случайного процесса в полученную ранее имитационную модель и произвести моделирование СМО в условиях воздействующих на нее возмущений.

Содержание отчета

Отчет должен содержать:

- корреляционную функцию стационарного случайного процесса;
- решение системы уравнений (3.2) (аналитическая или программная реализация);
- блок-схему метода скользящего суммирования;
- текст процедуры, реализующий метод скользящего суммирования;
- выборку сечений случайного процесса, сгенерированную по методу скользящего суммирования;
- результаты тестирования процедуры скользящего суммирования по критериям Стьюдента, Фишера;

- протокол моделирования СМО в условиях воздействия возмущающих случайных процессов.

Контрольные вопросы

1. Основные понятия теории случайных процессов: определение случайного процесса, классификация случайных процессов, законы распределения и основные характеристики случайных процессов.
2. Моделирование стационарных случайных процессов методом скользящего суммирования.
3. Возможные погрешности программных генераторов стационарных случайных процессов и методы их устранения. Способы оценки качества генераторов стационарных случайных процессов.
4. Распределения Стьюдента и Фишера. Критерии согласия Стьюдента, Фишера. Сравнительные характеристики, достоинства, области применения.

Пример

Смоделируем помехи в работе смесителя ввиду изменения влажности песка $\boldsymbol{\eta_2}$. Влажность песка представляет собой случайный стационарный нормальный процесс, причем по условию задания значения влажности находятся в интервале от **3**% до **7**%.

Для нормального процесса можно считать, что его математическое ожидание находится в середине интервала разброса. $\mathbf{M_\eta = (3+7)/2 = 5}$ (%).

Среднеквадратическое отклонение $\boldsymbol{\sigma_\eta}$ найдем по правилу «трех сигма»: $\mathbf{|3 - 7| = 6\sigma_\eta}$, откуда $\mathbf{\sigma_\eta = 0.67}$. Дисперсия процесса $\mathbf{D_\eta = \sigma_\eta^2 = 0.44}$.

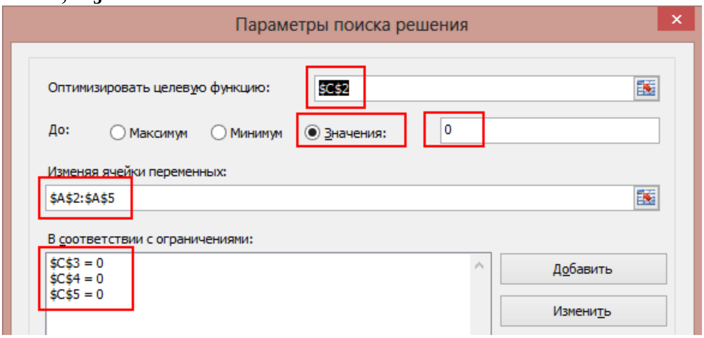
Построим корреляционную функцию случайного процесса в виде $\mathbf{K_\eta(\tau) = ae^{-b\tau}}$. Найдем константы **a** и **b**. $\mathbf{a = K_\eta(0) = D_\eta = 0.44}$. А величина **b** находится из соотношения $\mathbf{b \geq -\dfrac{\ln 0{,}05}{3\Delta t}}$. С учетом того, что шаг модельного времени для нашей задачи составляет 1 мин., возьмем $\mathbf{b \geq (\ln 20)/3 = 1}$.

Таким образом, случайный процесс изменения влажности песка описывается корреляционной функцией $\mathbf{K_\eta(\tau) = 0.44e^{-\tau}}$.

Составим систему нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} \mathbf{K_\eta(0) = C_0^2 + C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 = 0.44} \\ \mathbf{K_\eta(1) = C_0C_1 + C_1C_2 + C_2C_3 = 0.16} \\ \mathbf{K_\eta(2) = C_0C_2 + C_1C_3 = 0.06} \\ \mathbf{K_\eta(3) = C_0C_3 = 0.02} \end{cases}$$

Для решения системы уравнений использована надстройка MS Excel «Поиск решения», результат следующий: $\mathbf{C_0 = 0.087}$, $\mathbf{C_1 = 0.027}$, $\mathbf{C_2 = 0.616}$, $\mathbf{C_3 = 0.229}$.



C2 | f_x =A2*A2+A3*A3+A4*A4+A5*A5-B2

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2	0,08737	0,44	-1,402E-06	-1,4E-06			
3	0,027066	0,16	6,1642E-07	6,16E-07			
4	0,615818	0,06	-2,491E-07	-2,5E-07			
5	0,228912	0,02	4,144E-08	4,14E-08			
6							

Построим функцию Process (M), генерирующую случайный процесс с заданной корреляционной функцией.

```
Function Process (M:real):real;
const C0=0.087; C1=0.027; C2=0.616; C3=0.229;
begin
        Process:=C0*Normal(0,1)…;
end;
```

При тестировании генератора случайного процесса получена следующая выборка сечений (**N=500**):
4,800 4,148 5,163 5,851 5,799 6,156 5,730 4,844 3,544 4,275 4,540 3,872 3,768 4,348 4,484 3,587 4,621…

Протестируем генератор случайного процесса по критерию Стьюдента. Для **N=500** число степеней свободы **β = 498**, что можно считать бесконечным. Зададимся доверительной вероятностью **p = 0.9**. Разобьем полученную выборку случайных сечений на две подвыборки, рассчитаем оценки математических ожиданий, дисперсий, а на их основе – параметр Стьюдента $\mathbf{t_{\beta,p}}$.
m′=… **m″**=... **D′**=... **D″**=...
$\mathbf{t_{\beta,p} = 0.23}$

Для **β = ∞** и **p = 0.9** по таблице находим $\mathbf{t^{табл}_{\beta,p}}$ = **0.126**. Так как $\mathbf{t_{\beta,p}} > \mathbf{t^{табл}_{\beta,p}}$, то критерий Стьюдента не подтверждает согласованность генератора случайного процесса с вероятностью **0.9**. Выберем другую вероятность **p = 0.8**, по таблице находим $\mathbf{t^{табл}_{\beta,p}}$ = **0.253**. Так как $\mathbf{t_{\beta,p}} < \mathbf{t^{табл}_{\beta,p}}$, то можно утверждать согласованность генератора с вероятностью **0.8**.

По аналогии тестируется генератор случайного процесса по критерию Фишера.

Выполняется моделирование системы массового обслуживания с включенным генератором случайных процессов. Выводится протокол моделирования.

Лабораторная работа № 4
Регрессионный анализ системы массового обслуживания

Цель работы: построить регрессионную модель системы массового обслуживания, экспериментируя с имитационной моделью.

Содержание работы

Регрессионная модель – это некоторая аналитическая зависимость одних параметров системы, называемых **откликами**, от других параметров, называемых **факторами**. Обычно регрессионные зависимости строят, используя статистические данные о реальной системе. Регрессионная модель будет достаточно адекватной только, если возможно проведение существенного количества экспериментов с реальной системой, обеспечивающего статистическую устойчивость получаемых зависимостей. В учебных целях вместо реальной системы мы будем использовать ее имитационную модель, полученную в результате выполнения лабораторных работ 1-3. В реальности же такая подмена обычно не имеет смысла, так как имитационная модель сама по себе более информативна, чем регрессионная.

Прежде, чем строить регрессионную модель, необходимо определиться, что будет являться откликами модели (зависимые параметры), а что будет факторами модели (независимые параметры). Регрессия 2-го рода предполагает, что имеется один отклик, обозначим его $\mathbf{Y}$, и несколько факторов, обозначим их $\mathbf{X_1, X_2, \ldots, X_m}$. Линейная регрессионная модель строится в виде линейной зависимости отклика от факторов:

$$\mathbf{Y = a_0 + a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_mX_m}, \tag{4.1}$$

где $\mathbf{a_0, a_1, a_2, \ldots a_m}$ – константы, определяемые по результатам натурных экспериментов.

Пусть проведено $\mathbf{N}$ экспериментов, в каждом из которых измерялись значения факторов и отклика системы. Обозначим через $\mathbf{X_i^{(k)}}$ результат измерения $\mathbf{i}$–го фактора в $\mathbf{k}$–м эксперименте, а через $\mathbf{Y^{(k)}}$ – результат измерения отклика системы в $\mathbf{k}$–м эксперименте, $\mathbf{i = 1 \ldots m}$, $\mathbf{k = 1 \ldots N}$. Тогда константы $\mathbf{a_0, a_1, a_2, \ldots a_m}$ определяются в результате решения системы линейных алгебраических уравнений $\mathbf{m+1}$ порядка.

$$\begin{cases} N\cdot a_0 + a_1\sum\limits_k X_1^{(k)} + a_2\sum\limits_k X_2^{(k)} \ldots + a_m\sum\limits_k X_m^{(k)} = \sum\limits_k Y^{(k)} \\ a_0\sum\limits_k X_1^{(k)} + a_1\sum\limits_k (X_1^{(k)})^2 + a_2\sum\limits_k X_1^{(k)}\cdot X_2^{(k)} + \ldots + a_m\sum\limits_k X_1^{(k)}\cdot X_m^{(k)} = \sum\limits_k X_1^{(k)}\cdot Y^{(k)} \\ a_0\sum\limits_k X_2^{(k)} + a_1\sum\limits_k X_2^{(k)}\cdot X_1^{(k)} + a_2\sum\limits_k (X_2^{(k)})^2 + \ldots + a_m\sum\limits_k X_2^{(k)}\cdot X_m^{(k)} = \sum\limits_k X_2^{(k)}\cdot Y^{(k)} \\ \ldots \\ a_0\sum\limits_k X_m^{(k)} + a_1\sum\limits_k X_m^{(k)}X_1^{(k)} + a_2\sum\limits_k X_m^{(k)}\cdot X_2^{(k)} + \ldots + a_m\sum\limits_k (X_m^{(k)})^2 = \sum\limits_k X_m^{(k)}\cdot Y^{(k)} \end{cases} \tag{4.2}$$

Построив регрессионную модель, можно выполнить ее анализ и сделать некоторые выводы о функционировании системы. Так, по знаку константы $\mathbf{a_i}$ можно судить о направлении влияния $\mathbf{i}$-того фактора на отклик системы, а по абсолютной величине этой константы судят о силе такого влияния.

Далее следует определить адекватность регрессионной модели. Для этих целей на практике сравнивают функционирование реальной системы и результаты, получаемые с помощью регрессионной модели. В учебных целях вместо натурных испытаний реальной системы будем использовать имитационное моделирование.

Выполним $\mathbf{n}$ прогонов имитационной модели и получим статистику испытаний. Обозначим через $\mathbf{X_i^{(k)}}$ результат измерения $\mathbf{i}$–го фактора в $\mathbf{k}$–м прогоне, а через $\mathbf{Y^{(k)}}$ – результат измерения отклика системы в $\mathbf{k}$–м прогоне, $\mathbf{i = 1 \ldots m}$, $\mathbf{k = 1 \ldots n}$. После каждого $\mathbf{k}$–го эксперимента с имитационной моделью подставим значения $\mathbf{X_i^{(k)}}$ в выражение регрессионной модели (4.1), учитывая, что константы $\mathbf{a_i}$ уже определены, и вычислим отклик $\mathbf{Y_p^{(k)}}$ регрессионной модели. Таким образом, получим выборку из $\mathbf{n}$ откликов имитационной модели (используемой нами вместо реальной системы) и соответствующих им откликов регрессионной модели. Применим критерий Стьюдента. Действуя по аналогии с процедурой, проведенной в лабораторной работе № 3, вычислим статистические оценки двух выборок.

$$\mathbf{m' = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y^{(k)}, m'' = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_p^{(k)}}$$

$$\mathbf{D' = \sum_{k=1}^{n}\frac{(Y^{(k)} - m')^2}{n-1}, D'' = \sum_{k=1}^{n}\frac{(Y_p^{(k)} - m'')^2}{n-1}}$$

Вычислим параметр распределения Стьюдента $\mathbf{t_\beta = \sqrt{\frac{(m' - m'')^2 \cdot n}{D}}}$, где $\mathbf{D = \frac{(D' + D'')}{2}}$. По таблице распределения Стьюдента для числа степеней свободы $\mathbf{\beta = n\text{-}1}$ находим наиболее близкое табличное значение $\mathbf{t_\beta^{табл}}$, не меньшее, чем $\mathbf{t_\beta}$. Оценкой адекватности регрессионной модели будет величина $\mathbf{\alpha = 1\text{-}p}$, где $\mathbf{p}$ – вероятность, соответствующая табличному значению $\mathbf{t_\beta^{табл}}$.

Порядок выполнения работы

1. Определить отклик регрессионной модели и совокупность факторов модели. В качестве отклика рекомендуется взять один из показателей работы системы, а факторами должны быть все величины, которые могут влиять на отклик.

2. Изменяя факторы модели при каждом прогоне модели, провести несколько десятков имитационных экспериментов с моделью, фиксируя значения отклика и факторов.
3. Решив систему уравнений (4.2), найти константы регрессионной модели $\mathbf{a_0, a_1, a_2, \ldots a_m}$.
4. Проанализировать полученную зависимость. Установить, соответствуют ли знаки и величины констант регрессионной модели интуитивным представлениям о характере зависимости отклика от факторов.
5. Оценить адекватность регрессионной модели.

Содержание отчета

Отчет должен содержать:
- перечень откликов и факторов регрессионной модели;
- результаты экспериментирования с имитационной моделью;
- решение системы (4.1);
- регрессионную модель системы в виде аналитической зависимости отклика от факторов;
- расчет адекватности регрессионной модели.

Контрольные вопросы

1. Виды регрессионных зависимостей.
2. Методика применения метода наименьших квадратов при построении регрессионных моделей.
3. Понятие о доверительном интервале и доверительной вероятности.
4. Способы вычисления адекватности модели.

Пример

В качестве отклика регрессионной модели смесителя возьмем производительность работы **P**. Факторами такой модели будут: скорости заполнение бункеров $\mathbf{W_1, W_2, W_3, W_4}$, время смешивания **t**, объемы бункеров $\mathbf{V_1, V_2, V_3, V_4}$. Варьируем объемы бункеров в пределах от **5** до **15**, математические ожидания скоростей заполнения $\mathbf{m_1}$ от **0.05** до **0.15**, $\mathbf{m_2}$ от **0.1** до **0.3**, $\mathbf{m_3}$ от **0.2** до **0.4**, $\mathbf{m_4}$ от **0.05** до **0.15**, параметр показательного распределения времени смешивания $\boldsymbol{\lambda}$ – в пределах от **0.05** до **0.15**. Прогоняем модель для каждой вариации факторов и вычисляем производительность системы как среднее количество произведенной смеси за одну минуту:

$$\mathbf{P} = \frac{\textbf{Суммарное количество выгруженной смеси}}{\textbf{Время моделирования}} \text{ (кг/мин).}$$

Проведем 200 испытаний, результаты сводим в таблицу:

N	**m_1**	**m_2**	**m_3**	**m_4**	$1/\lambda$	**V_1**	**V_2**	**V_3**	**V_4**	**P**
1	0.05	0.1	0.2	0.05	20	5	5	5	5	3.7
2	0.06	0.1	0.2	0.05	20	5	5	5	5	3.5
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
41	0.15	0.15	0.22	0.1	19	7	7	8	12	4.2
42	0.15	0.15	0.22	0.1	18	7	7	8	12	4.3
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

На основе результатов имитационных экспериментов составим систему уравнений для нахождения коэффициентов регрессии.

$$\begin{cases} \mathbf{200a_0 + 35.4a_1 + 351.5a_2 + \ldots + 0.88a_9 = 101.3} \\ \mathbf{35.4a_0 + 121.1a_1 + 46.6a_2 + \ldots + 3.5a_9 = 124.6} \\ \mathbf{351.5a_0 + 46.6a_1 + 243.3a_2 + \ldots + 76.2a_9 = 451.0} \\ \mathbf{\ldots} \\ \mathbf{0.88a_0 + 3.5a_1 + 76.2a_2 + \ldots + 112.1a_9 = 421.6} \end{cases}$$

Для решения системы уравнений использован метод Гаусса. Текст приведен ниже.

```
Procedure Gauss;
begin;
…
end;
```

Результат решения: $\mathbf{a_0 = 1.2;\ a_1 = 2.2;\ a_2 = 0.76\ \ldots\ a_5 = -4.3;\ldots}$

Регрессионная модель имеет следующий вид:

$\mathbf{P = 1.2 + 2.2\ W_1 + 0.76\ W_2 + \ldots - 4.3\ t\ \ldots}$

Состав регрессионной модели показывает, что факторы $\mathbf{W_1}$, $\mathbf{W_2}$, $\mathbf{W_3}$, $\mathbf{W_4}$, $\mathbf{V_1}$, $\mathbf{V_2}$, $\mathbf{V_3}$, $\mathbf{V_4}$ влияют на производительность положительно, а фактор **t** – отрицательно (т.е. с увеличением времени смешивания производительность уменьшается). Это соответствует интуитивным представлениям.

Определим адекватность регрессионной модели.

Для каждого из 200 испытаний рассчитаем показатель производительности, используя выражение для регрессионной модели, рассчитаем статистические оценки.

N	P	P_p
1	3.7	3.6
2	3.5	3.6
…	…	…
200	4.2	4.0
m	4.02	3.97
D	0.16	0.1

Вычислим параметр распределения Стьюдента: $\mathbf{t_\beta}$ =**1.96**. Число степеней свободы **β = 200-1** = **199**, примем его равным бесконечности. По таблице распределения Стьюдента определяем доверительную вероятность, которая равна **0.05**. Делаем вывод, что построенная регрессионная модель адекватна на **95%**.

Лабораторная работа № 5.
Оптимизация системы массового обслуживания

Цель работы: произвести оптимизацию системы массового обслуживания, пользуясь разработанной имитационной моделью.

Содержание работы

По завершении третьей работы формирование имитационной модели рассматриваемой системы закончено. В четвертой работе проверена адекватность модели. Можно приступить к результирующей задаче моделирования – получению новых знаний о системе посредством изучения модели. В пятой лабораторной работе необходимо провести вычислительные эксперименты над моделью и, варьируя параметры модели, оптимизировать (минимизировать или максимизировать – смотри по смыслу) показатели работы моделируемой системы массового обслуживания.

Процессы в сложных системах можно достаточно полно оценить только совокупностью различных показателей качества, поэтому для их оптимизации необходимо выбирать несколько частных критериев качества функционирования системы R_1, R_2,..., R_s . В этом случае говорят, что систему надо оптимизировать по ***векторному критерию*** оптимальности $\boldsymbol{R = (R_1, R_2, ..., R_s)^T}$. Как правило, частные критерии оказываются противоречивыми. Например, желательно иметь максимально надежную (частный критерий R_1), простую по конструкции (частный критерий R_2), дешевую по стоимости (частный критерий R_3) систему. Поскольку критерии функционирования системы противоречивы, скорее всего, не найдется такого набора параметров, который оптимизировал бы все показатели работы системы одновременно. Однако, следуя принципу В.Парето, можно решить такую задачу ***многокритериальной (векторной) оптимизации*** и найти ряд компромиссных вариантов функционирования системы. Для этого параметры сложной системы варьируются произвольно в обе стороны от начальных значений с учетом ограничений, исходя из их физического смысла. Результаты экспериментирования сводятся в таблицу. Для получения достаточно полных результатов необходимо выполнить несколько десятков экспериментов.

Результаты вычислительного эксперимента над моделью при решении задачи векторной оптимизации СМО (таблица альтернатив)

Номер варианта	Значения варьируемых па-				Значение показателей качества			
	X_1	X_2	…	X_m	R_1	R_2	…	R_s
1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1m}	r_{11}	r_{12}	…	r_{1s}
2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2m}	r_{21}	r_{22}	…	r_{2s}
…	…	…	…	…	…	…	…	…
N	x_{N1}	x_{N2}	…	x_{Nm}	r_{N1}	r_{N2}	…	r_{Ns}

Таким образом, каждая вариация параметров системы $\mathbf{X_1...X_m}$ дает свой набор значений показателей качества $\mathbf{R_1...R_S}$. Поиск компромиссных ***(Парето-оптимапъиых)*** решений проводится с помощью метода квадрантов, суть которого состоит в следующем: если для варианта **j** найдется вариант **k**, лучший чем **j** по всем **s** критериям, то вариант **j** исключается из таблицы альтернатив. Алгоритм поиска Парето-оптимальных вариантов следующий:

1. Выбираем вариант $\boldsymbol{j}$.
2. Выбираем вариант $\boldsymbol{k \neq j}$.
3. Если $\boldsymbol{\forall i \;\; r_{ki} \succ r_{ji}, \;\; (i = 1 \div s)}$, то вариант $\boldsymbol{j}$ исключается из таблицы.

Здесь символ «$\succ$» означает бинарное отношение «лучше (не хуже)» и реализуется логическими операциями «больше (больше-равно)» или «меньше (меньше-равно)», исходя из смысла задачи.

4. Если не все варианты $\boldsymbol{k}$ просмотрены, то переход к п.2.
5. Если не все варианты $\boldsymbol{j}$ просмотрены, то переход к п. 1.

6. Оставшиеся в результате варианты (строки таблицы) являются Парето-оптимальными и представляют собой компромиссные решения задачи многокритериальной оптимизации.›

Порядок выполнения работы

1. Провести анализ исходной задачи векторной оптимизации и составить перечень показателей (критериев оптимизации) и варьируемых параметров задачи. Уточнить или составить алгоритмы вычисления критериев оптимизации, включить их в состав цифровой имитационной модели.
2. Варьируя параметры системы, провести ряд экспериментов (несколько десятков) с имитационной моделью СМО и получить исходные данные для решения оптимизационной задачи (таблицу альтернатив).
3. Составить блок-схему и разработать процедуру, решающую задачу Парето-оптимизации методом квадрантов.
4. Получить таблицу Парето-оптимальных параметров модели исследуемой системы.

Содержание отчета

Отчет должен включать:

- постановочную часть оптимизационной задачи, включая интервалы вариации параметров;
- таблицу результатов экспериментирования с моделью (таблицу альтернатив);
- блок-схему алгоритма квадрантов;
- текст процедуры, реализующий Парето-оптимизацию заданной системы;
- таблицу Парето-оптимальных альтернатив.

Контрольные вопросы

1. Классификация оптимизационных задач: статическая и динамическая оптимизация, векторная и скалярная оптимизация.
2. Методы решения статических многокритериальных оптимизационных задач: метод квадрантов Парето-оптимизации и метод последовательных уступок.

Пример

Работа смесителя оценивается по трем показателям: производительность системы, стоимость смеси, качество смеси. Производительность вычисляется как количество смеси, произведенное в единицу времени:

$$\mathbf{P = \frac{Суммарное\ количество\ выгруженной\ смеси}{Время\ моделирования}}\ \text{(кг/мин)}.$$

Стоимость смеси складывается из стоимости расходуемых компонент, стоимости работы смесителя, стоимости простоя смесителя, а также из стоимости амортизации бункеров. Введем константы: $\mathbf{Ц_1}$ – цена 1 куб. м воды, $\mathbf{Ц_2}$ – цена 1 куб. м песка, $\mathbf{Ц_3}$ – цена 1 куб. м цемента, $\mathbf{Ц_4}$ – цена 1 куб. м красителя, $\mathbf{Ц_P}$ – цена 1 мин работы смесителя, $\mathbf{Ц_П}$ – цена 1 мин простоя смесителя, $Ц_А$ – цена амортизации бункеров в расчете 1 куб. м объема. В процесс моделирования соберем статистику: $\mathbf{K_1}$ – объем израсходованной воды, $\mathbf{K_2}$ – объем израсходованного песка, $\mathbf{K_3}$ – объем израсходованного цемента, $\mathbf{K_4}$ – объем израсходованного красителя, $\mathbf{T_P}$ – суммарное время работы смесителя, $\mathbf{T_П}$ – суммарное время простоя смесителя. Стоимость амортизации бункеров будем считать пропорциональной их объему. Тогда стоимость 1 кг смеси определяется так:

$$\mathbf{C = \frac{Ц_1 \cdot K_1 + Ц_2 \cdot K_2 + Ц_3 \cdot K_3 + Ц_4 \cdot K_4 + Ц_P \cdot T_P + Ц_П \cdot T_П + Ц_А \cdot (V_1 + V_2 + V_3 + V_4)}{Количество\_смеси}}.$$

Качество смеси определяется ее влажностью и подсчитывается в момент выгрузки смеси по формуле:

$$\mathbf{B = (N_1 + \eta_2 \cdot N_2/100 + \eta_3 \cdot N_3/100 + \eta_4 \cdot N_4/100)/(N_1 + N_2 + N_3 + N_4) \cdot 100.}$$

Варьируемыми параметрами являются объемы бункеров $\mathbf{V_1}$ $\mathbf{,V_2,\ V_3\ ,\ V_4}$**.** Будем варьировать каждый параметр в интервале от **8** до **12** с шагом в **1** (м^3). Таким образом, всего получится $5^4 = 625$ вариаций. Прогоняем модель для каждой вариации, подсчитывая показатели работы. Результаты сводим в таблицу.

Результаты вычислительных экспериментов с моделью (таблица альтернатив)

Номер варианта	Значения варьируемых параметров				Показатели качества модели		
	V_1	V_2	V_3	V_4	P (кг/мин)	C (руб)	B (%)
1	8	8	8	8	14.7	312.2	12.0
2	9	8	8	8	12.1	332.0	12.5
…	…	…	…	…	…	…	…
6	8	9	8	8	13.1	325.4	13.1
7	8	10	8	8	13.6	342.4	12.8
…	…	…	…	…	…	…	…
625	12	12	12	12	15.4	411.3	13.4

Для проведения многокритериальной оптимизации применим алгоритм квадрантов, с учетом следующего понимания бинарного отношения «лучше». Для показателя **Р** (производительность): чем больше, тем лучше; для показателя **С** (стоимость): чем меньше, тем лучше; для показателя **В** (влажность): чем меньше, тем лучше.

Результаты многокритериальной оптимизации в таблице.

Парето-оптимальные варианты

Номер варианта	Значения варьируемых параметров				Показатели качества модели		
	$\mathbf{V_1}$	$\mathbf{V_2}$	$\mathbf{V_3}$	$\mathbf{V_4}$	**P**	**C (руб)**	**B (%)**
11	8	10	8	8	14.8	311.2	12.1
23	10	12	8	8	12.1	332.0	11.5
116	8	11	12	8	13.5	315.4	11.1
117	9	11	12	8	14.6	342.4	10.8
435	12	9	10	11	15.4	410.3	12.4

Вывод: Для компромиссной оптимизации работы смесителя по критериям производительности, стоимости и влажности смеси необходимо выбрать один из пяти вариантов (11, 23, 116, 117 или 435) размеров бункеров-дозаторов.

Расчетно-графическое задание.

Построение имитационных моделей систем массового обслуживания с помощью пакетов моделирования

Цель работы: построение имитационной модели системы массового обслуживания, параметры которой являются случайными независимыми величинами, с помощью инструментальных средств моделирования.

Содержание работы

По завершении лабораторных работ формирование имитационной модели рассматриваемой системы на базе универсальных языков программирования закончено. В РГЗ же предлагается построить аналогичную имитационную модель с использованием специальных инструментальных средств – пакетов моделирования.

Для исследовательских задач подходят такие пакеты моделирования как MVStudio и Rand Model Designer. Они используют язык Modeling Visio Language для описания сложных динамических моделей в виде набора классов и объектов.

Интегрированные среды подобных моделирующих пакетов предоставляют следующие возможности:

- редактирование математической модели в интерактивном режиме;
- импорт/экспорт модели в текстовый или иной формат;
- проверка корректности модели;
- визуализация модели;
- средства экспериментирования с моделью.

Также пакеты моделирования содержат библиотеки с модулями решения систем уравнений и предопределенными генераторами случайных чисел.

Порядок выполнения работы

1. Установить интегрированную графическую оболочку Rand Model Designer.
2. Произвести декомпозицию системы на классы.
3. Разработать для каждого из классов описание и карты поведения, учитывая случайные независимые величины. При необходимости организации непрерывной деятельности в классе добавить системы уравнений.

4. Разработать структурную схему, изображающую совокупность параллельно функционирующих компонент системы и связи между ними.
5. Визуализировать модель системы в виде 2D-анимации с интерактивными элементами.
6. Провести вычислительные эксперименты с готовой моделью, чтобы убедиться в ее работоспособности.

Содержание отчета

Отчет должен включать:
• постановочную часть задачи по варианту, включая данные для стохастической модели (по части случайных величин);
• детальное описание всех классов: назначение класса, параметры, входы и выходы, внутренние переменные, карта поведения, системы уравнений (при наличии);
• вид виртуального стенда (структурная схема модели);
• итоговый вид разработанной модели с 2D-анимацией.

Контрольные вопросы

1. Классификация пакетов моделирования и их общая конструкция. Требования к инструментальным средствам моделирования.
2. Объектно-ориентированное моделирование сложных динамических систем. Объекты и классы. Состав проекта моделирования.
3. Описание языка MVL: переменные, стереотипы, типы данных. Карта поведения объекта. Структурная схема модели.

Пример

Постановка задачи совпадает с первой и второй лабораторными работами. Моделирование случайных процессов и решение оптимизационной задачи в рамках использования пакета Rand Model Designer не рассматриваем.

При создании нового проекта в Rand Model Designer будем использовать вид модели *Гибридный элементарный объект*.

По сюжету задачи о смесителе периодического действия параллельно функционирующими компонентами этой системы являются бункеры-дозаторы и сам смеситель. Бункеры – это однотипные сущности, поэтому для их моделирования достаточно одного класса с параметрами, описывающими объем бункера и размер порции по рецепту.

Экземпляры класса «Бункер» будут отличаться значениями этих параметров.

Исходя из приведенных соображений в структуре проекта будет три класса: «Model» (класс по умолчанию), «Бункер», «Смеситель». Перейдем к описанию классов.

Класс «Бункер». Данный класс отвечает за заполнение бункера компонентом определенного вида с последующей отгрузкой в смеситель.

Параметры:

• V (double) – объем бункера;

• N (double) – порция, поступаемая в смеситель по рецепту.

Входы: signalStart (signal) – сигнал, оповещающий о том, что сейчас требуется отгрузить порцию компонента в смеситель.

Выходы: bIsFullForRecipe (boolean) – заполнен ли бункер порцией для отгрузки по рецепту.

Внутренние переменные:

• bIsFull (boolean) – заполнен ли бункер до конца;

• T (double) – время заполнения бункера;

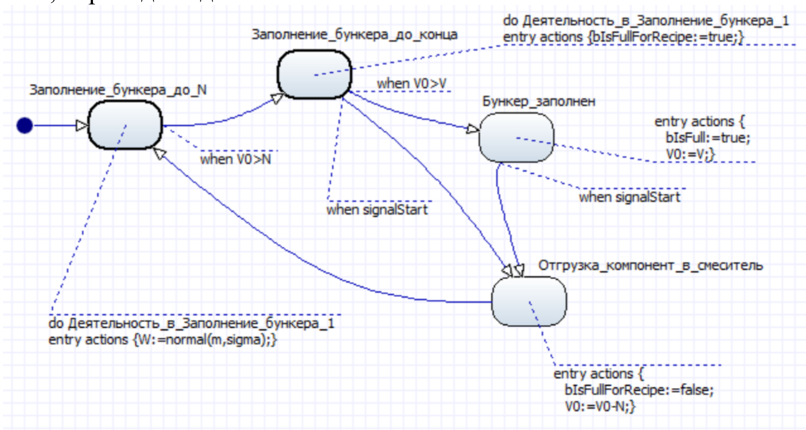
• V0 (double) – текущее количество ингредиента в бункере;

• m (double) – параметр закона распределения;

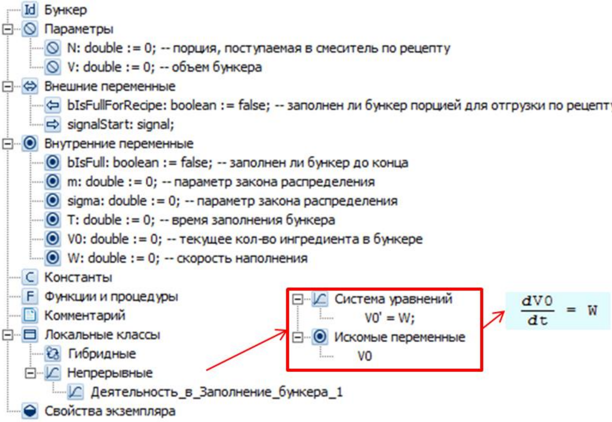
• sigma (double) – параметр закона распределения;

• W (double) – скорость наполнения.

Карта поведения класса «Бункер» включает следующие состояния, переходы и действия:



Непрерывное заполнение бункеров с некоторой скоростью опишем с помощью системы дифференциальных уравнений:



Класс «Смеситель». Данный класс моделирует собственно работу смесителя периодического действия. В нем производится ожидание заполнения бункеров, смешивание и учет количества готовых порций продукции.

Параметры: T (double) – время смешивания.

Входы:

• bIsFull1 (boolean) – заполен ли бункер 1 достаточным количеством компонента;

• bIsFull2 (boolean) – заполен ли бункер 2 достаточным количеством компонента;

• bIsFull3 (boolean) – заполен ли бункер 3 достаточным количеством компонента;

• bIsFull4 (boolean) – заполен ли бункер 4 достаточным количеством компонента.

Выходы: signalStart (signal) – сигнал, оповещающий о том, что сейчас требуется отгрузить порцию компонента в смеситель.

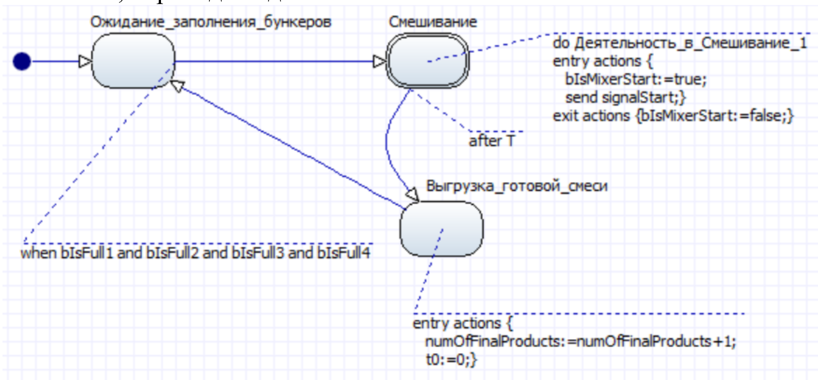
Внутренние переменные:

• bIsMixerStart (boolean) – запущен ли смеситель в данный момент;

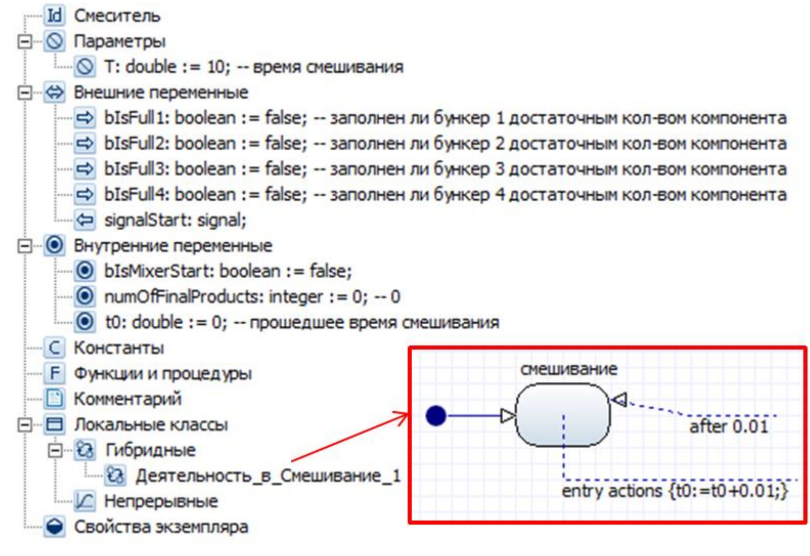
• numOfFinalProducts (integer) – количество готовых порций продукции;

• t0 (double) – прошедшее время смешивания.

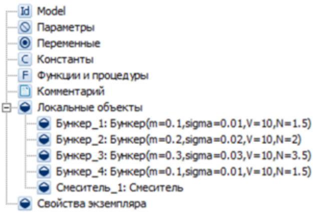
Карта поведения класса «Смеситель» включает следующие состояния, переходы и действия:

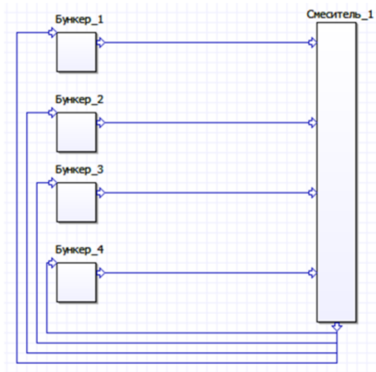


Процесс смешивания опишем с помощью гибридной деятельности:

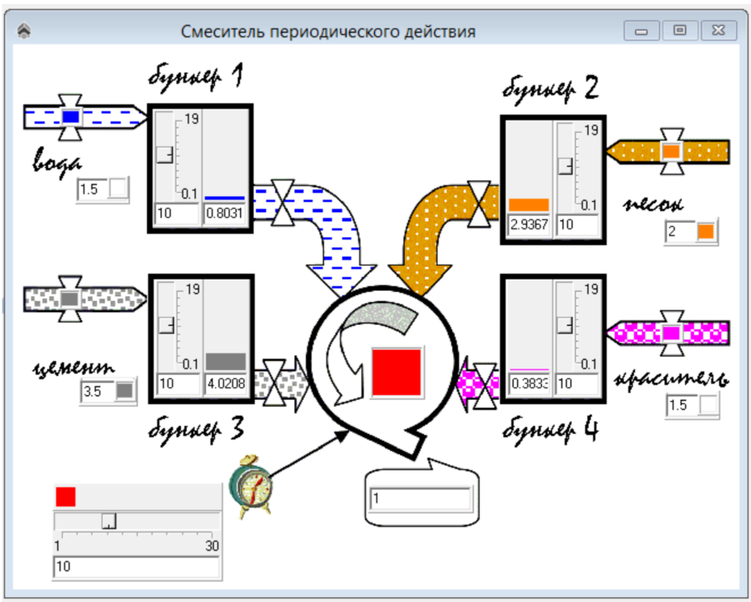


Создадим структуру модели с 4-мя экземплярами класса «Бункер», установим связи между входами и выходами сущностей системы:





Для визуализации модели создадим 2D-анимацию. Варьируемые параметры (объемы бункеров) будем изменять интерактивными элементами – ползунками. Для отображения значений переменных используем индикаторы, предварительно связав их с необходимыми переменными. Итоговый вид разработанной модели представлен ниже:



Интерактивная визуальная модель сложной динамической системы готова. Остается запустить ее и провести наблюдения.

Приложение 1
Варианты заданий лабораторных работ

Вариант №1

На обрабатывающий участок цеха поступают детали с интервалом **T** (мин). Первичная обработка детали производится на одном из двух станков. Первый станок обрабатывает деталь за $\mathbf{t_1}$ (мин) и имеет $\mathbf{\Delta_1}$(%) брака. Второй станок - $\mathbf{t_2}$(мин) и $\mathbf{\Delta_2}$(%). Бракованные детали возвращаются на повторную обработку. Детали, попавшие в разряд бракованных дважды, считаются отходами. Вторичную обработку проводят оба станка за $\mathbf{t_3}$ (мин) каждый. Второй станок подключается только при образовании в накопителе больше трех деталей. Смоделировать обработку 500 деталей.

Данные для детерминированной модели СМО: $\mathbf{T =50, t_1=40, t_2 = 60, t_3=100, \Delta_1=4, \Delta_2=8}$.

Данные для стохастической модели СМО: интервалы $\mathbf{t_1, t_2, t_3}$ имеют показательное распределение с параметрами: $\mathbf{\lambda_1=0{,}025, \lambda_2=0{,}016, \lambda_3=0{,}01}$; интервал **T** имеет нормальное распределение с параметрами $\mathbf{\sigma_T=5, m_T =50}$; возмущения $\mathbf{\Delta_1}$, $\mathbf{\Delta_2}$являются стационарными случайными процессами с нормальными законами распределения и интервалами разброса **[1...5] и [4...10]** соответственно.

Варьируемые параметры: $\mathbf{m_T}$.

Показатели работы: средняя себестоимость одной детали, производительность цеха, уровень брака.

Вариант №2

На участке термической обработки выполняется цементация и закаливание шестерен, поступающих через $\mathbf{t_1}$(мин). Цементация занимает $\mathbf{t_2}$(мин), а закаливание – $\mathbf{t_3}$ (мин). Шестерни со временем обработки больше $\mathbf{T_1}$ покидают участок и считаются 1-м сортом, со временем обработки от $\mathbf{T_2}$ до $\mathbf{T_1}$ покидают участок и считаются 2-м сортом, со временем обработки менее $\mathbf{T_2}$ должны пройти повторную закалку. Смоделировать процесс обработки 400 шестерен.

Данные для детерминированной модели СМО: $\mathbf{t_1 = 40, t_2=10, t_3=33, T_1=25, T_2=20}$.

Данные для стохастической модели СМО: интервал $\mathbf{t_2}$ распределен по нормальному закону с параметрами $\mathbf{m_2=10, \sigma_2=2{,}5}$; интервал $\mathbf{t_3}$ имеет показательное распределение с параметром $\mathbf{\lambda_3=0{,}03}$;

интервал $\mathbf{t_1}$ является стационарным случайным процессом с нормальным законом распределения и интервалом разброса **[8...12].**

Варьируемые параметры: $\mathbf{T_1}$, $\mathbf{T_2}$.

Показатели работы: производительность участка, средняя себестоимость обработки шестерни, процент продукции 1-го сорта.

Вариант №3

Магистраль передачи данных состоит из двух каналов (основного и резервного) и общего накопителя. При нормальной работе сообщения передаются по основному каналу за $\mathbf{t_1}$ (с). В основном канале происходят сбои через интервал $\mathbf{t_3}$ (с). После сбоя через **T** (с) запускается запасной канал, который передает прерванное сообщение с самого начала. Восстановление основного канала занимает $\mathbf{t_2}$ (с). Сообщения поступают через $\mathbf{t_4}$ (с). По запасному каналу сообщения передаются за $\mathbf{t_5}$ (с). Смоделировать работу магистрали в течение часа.

Данные для детерминированной модели СМО: $\mathbf{t_1=7,\ t_2=23,\ t_3=200,\ t_4=9,\ t_5=9,\ T=5.}$

Данные для стохастической модели СМО: интервалы $\mathbf{t_3}$, $\mathbf{t_4}$ распределены экспоненциально с параметрами $\mathbf{\lambda_3=0{,}005,\ \lambda_4=0{,}1}$, $\mathbf{t_1}$, $\mathbf{t_5}$ распределены по нормальному закону с параметрами $\mathbf{m_1=7,\ \sigma_1=2,\ m_5=9,\ \sigma_2=2;}$ время восстановления $\mathbf{t_2}$ является стационарным случайным процессом с нормальным законом распределения и интервалом разброса **[20…26].**

Варьируемый параметр: **T.**

Показатели работы: число прерванных сообщений, количество включений запасного канала.

Вариант №4

N - канальная система передачи данных осуществляет связь между пунктами А и В. Пакеты поступают в пункт А с интервалом $\mathbf{t_1}$ (мс). Передача пакета занимает $\mathbf{t_2}$ (мс). В пункте А имеется буферный регистр, который может хранить **E** пакетов. Если пакет пришел, когда все каналы заняты, сообщение передается по спутниковому каналу за время $\mathbf{t_3}$ (мс). Смоделировать обмен информацией за 1 мин.

Данные для детерминированной модели СМО: $\mathbf{N=4,\ t_1=2,\ t_2=10,\ t_3=12,\ E=3.}$

Данные для стохастической модели СМО: интервал времени $\mathbf{t_1}$ имеет показательное распределение с параметром $\mathbf{\lambda_1=0{,}5;}$ $\mathbf{t_2}$ распределено нормально с параметрами $\mathbf{m_2=10,\ \sigma_2=3;}$ возмущение $\mathbf{t_3}$ является стационарным случайным процессом с нормальным законом распределения и интервалом разброса **[8... 12].**

Варьируемые параметры: **N, E.**

Показатели работы: производительность системы, стоимость передачи информации, загруженность спутниковой линии.

Вариант №5

На вычислительном центре в обработку принимаются три класса заданий А, В и С . Задания класса А поступают через $\mathbf{t_1}$ (мин), класса В - через $\mathbf{t_2}$ (мин) и класса С - через $\mathbf{t_3}$ (мин) и требуют для выполнения: класс А- $\mathbf{t_4}$ (мин), класс В - $\mathbf{t_5}$ (мин) и класс С - $\mathbf{t_6}$ (мин). Задачи класса С загружаются в ЭВМ, если она полностью свободна. Задачи классов А и В могут дозагружаться к решающейся задаче, если позволяет оперативная память (ОП). Задачи класса А требуют $\mathbf{L_A}$ (кбайт) ОП, В - $\mathbf{L_B}$ (кбайт) ОП, С - $\mathbf{L_C}$ (кбайт) ОП. Объем ОП - $\mathbf{L_o}$(кбайт). Смоделировать работу ЭВМ в течение 20 ч.

Данные для детерминированной модели СМО: $\mathbf{t_1=t_2=20, t_3=30, t_4=16, t_5=21, t_6 =28, L_A = 200, L_B=260, L_c =400, L_o =640.}$

Данные для стохастической модели СМО: интервалы $\mathbf{t_1 ...t_3}$ распределены экспоненциально с параметрами $\mathbf{\lambda_1=\lambda_2=0{,}05,\ \lambda_3=0{,}03,}$ интервалы $\mathbf{t_4...t_6}$ распределены нормально с **параметрами** $\mathbf{m_{t4}=20, m_{t5}=21, m_{t6}=28, \sigma_4=\sigma_5=\sigma_6=3;}$ возмущающие воздействия приводят к отказу регистров ОП, что проявляется в виде изменения ее объема $\mathbf{L_0}$, который является стационарным случайным процессом с нормальным законом распределения и интервалом разброса **[500...640].**

Варьируемые параметры: $\mathbf{L_A, L_B, L_c}$

Показатели работы: производительность ЭВМ по всем трем классам заданий, стоимость работы ЭВМ.

Вариант№6

Для обеспечения надежности АСУ ТП в ней используются две ЭВМ. Первая ЭВМ выполняет обработку данных о технологическом процессе и выработку управляющих сигналов, а вторая находится в «горячем резерве». Данные в ЭВМ поступают через $\mathbf{t_1}$(с), обрабатываются в течение $\mathbf{t_2}$(с), затем посылается управляющий сигнал, поддерживающий заданный темп процесса. Если к моменту посылки следующего набора данных не получен управляющий сигнал, то интенсивность выполнения технологического процесса уменьшается вдвое, и данные посылаются через $\mathbf{2t_1}$(с). Основная ЭВМ каждые $\mathbf{t_3}$(с) посылает резервной ЭВМ сигнал о работоспособности. Отсутствие сигнала означает необходимость включения резервной ЭВМ вместо основной. Характеристики обеих ЭВМ одинаковы. Подключение резервной ЭВМ занимает $\mathbf{t_4}$(с), после чего она заменяет основную до восстановления, а процесс возвращается к нормальному темпу. Отказы основной ЭВМ происходят через **T**(с). Восстановление работоспособности занимает $\mathbf{t_5}$(с). Резервная ЭВМ абсолютно надежна. Смоделировать работу системы в течение часа.

Данные для детерминированной модели СМО: $\mathbf{t_1=10}$, $\mathbf{t_2=8}$, $\mathbf{t_3=30}$, $\mathbf{t_4=5}$, $\mathbf{t_5=100}$, $\mathbf{T=300}$.

Данные для стохастической модели СМО: интервалы $\mathbf{t_2}$, $\mathbf{t_4}$, $\mathbf{t_5}$ распределены по нормальному закону с параметрами $\mathbf{m_2=8}$, $\mathbf{m_4=5}$, $\mathbf{m_5=100}$; $\boldsymbol{\sigma_2=2}$, $\boldsymbol{\sigma_4=1}$, $\boldsymbol{\sigma_5=5}$, интервалы $\mathbf{t_1}$ **и** $\mathbf{t_3}$ распределены по показательному закону с параметрами $\boldsymbol{\lambda_1=0{,}1}$, $\boldsymbol{\lambda_3=0{,}03}$; период отказа основной ЭВМ Т является стационарным случайным процессом с нормальным законом распределения и интервалом разброса **[200...400].**

Варьируемые параметры: $\mathbf{m_1}$, $\mathbf{m_3}$.

Показатели работы: время нахождения технологического процесса в замедленном состоянии, число пропущенных из-за отказа данных.

Вариант №7

Система передачи речи в цифровом виде состоит из двух каналов и одного накопителя. Время передачи пакета по каждому из каналов – $\mathbf{t_1}$ (мс). Пакеты поступают через время $\mathbf{t_2}$ (мс). Во время прохождения каналов пакеты получают искажения (чем больше время прохождения, тем больше вероятность искажений). Если количество искажений, превысило **N**, пакет уничтожается, и система за счет ресурсов ускоряет время передачи по каждому из каналов до $\mathbf{t_3}$ (мс). При снижении уровня искажений происходит отключение ресурсов, и время передачи по каждому из каналов снижается до $\mathbf{t_1}$(мс). Смоделировать работу системы в течение минуты.

Данные для детерминированной модели СМО: $\mathbf{N=6}$, $\mathbf{t_1=5}$, $\mathbf{t_2=6}$, $\mathbf{t_3=3}$.

Данные для стохастической модели СМО: интервалы $\mathbf{t_1}$, $\mathbf{t_3}$ распределены по нормальному закону с параметрами: $\mathbf{m_1=5}$, $\mathbf{m_3=3}$, $\boldsymbol{\sigma_1=\sigma_3=1}$, $\mathbf{t_2}$ распределено по показательному закону с параметром $\boldsymbol{\lambda_2=0{,}16}$; количество искажений при передаче пакета $\mathbf{N_{иск}=\boldsymbol{\eta} t_{пер}}$ пропорционально времени передачи по каналу $\mathbf{t_{пер}}$ и скорости возникновения искажений $\boldsymbol{\eta}$(1/мс), а скорость возникновения искажений $\boldsymbol{\eta}$, в свою очередь, является стационарным случайным процессом с нормальным законом распределения и интервалом разброса **[0...2].**

Варьируемые параметры: **N.**

Показатели работы: производительность системы, качество сообщений, количество уничтоженных сообщений, средняя стоимость передачи одного сообщения.

Вариант №8

Система обработки информации содержит мультиплексный канал и **N** ЭВМ. Сигналы поступают на вход канала через t_1(мкс). В канале они предварительно обрабатываются в течение t_2 (мкс). Затем они поступают на обработку в ту ЭВМ, где наименьшая очередь. Емкости входных накопителей в каждой ЭВМ - **E**. Время обработки сигнала в каждой из ЭВМ - t_3 (мкс). Смоделировать процесс обработки 1000 сигналов.

Данные для детерминированной модели СМО: $N=3$, $t_1=10$, $t_2=10$, $t_3=33$, $E=4$.

Данные для стохастической модели СМО: интервал t_1 распределен по показательному закону с параметром $\lambda_1=0,1$, интервалы t_2, t_3 распределены нормально с параметрами $m_2=10$, $m_3=33$, $\sigma_2=1,5$, $\sigma_3=3$; вследствие возмущающих воздействий емкости входных накопителей каждой из ЭВМ непрерывно меняются, поэтому величина **E** является стационарным случайным процессом с нормальным законом распределения и интервалом разброса **[2... 6]** (сигналы, находившиеся в накопителе до изменения его емкости и не вмещающиеся в него после изменения его емкости, уничтожаются).

Варьируемые параметры: **N.**

Показатели работы: производительность системы, стоимость обработки, вероятность переполнения накопителей.

Вариант №9

На комплектовочный конвейер сборочного цеха каждые t_1 (мин) поступают N_1 изделий первого типа и каждые t_2 (мин) поступают N_2 изделий второго типа. Конвейер состоит из двух секций, вмещающих по N_3 изделий каждого типа. Комплектация начинается только при наличии деталей обоих типов в требуемом количестве (полной заполненности обеих секций) и длится t_3 (мин). Смоделировать работу конвейера сборочного цеха в течение суток.

Данные для детерминированной модели СМО: $N_1=5$, $N_2=20$,

N_3=10, t_1 =5, t_2=20, t_3 =10.

Данные для стохастической модели СМО: интервал t_1, распределен нормально с параметрами **m_1=5, σ_1= 1;** интервал **t_2** распределен экспоненциально с параметром λ_2 **=0,05;** возмущающим воздействием является поступление бракованных деталей, количество которых **$N_{бр}$** в каждой очередной поступившей на конвейер партии **N_1** или **N_2** является стационарным случайным процессом с нормальным законом распределения и интервалом разброса **[0…2].**

Варьируемые параметры: объем секций **N_3**, время комплектации **t_3**.

Показатели работы: средняя производительность конвейера, полное время простоя конвейера из-за незаполненности секций, средние и максимальные очереди по каждому типу изделий.

Вариант №10

В машинном зале расположены **N_1** терминалов и **N_2** принтеров. Каждые **t_1** (мин) в зал заходит **N_4** студентов и **Δ**(%) из них хочет использовать терминалы и принтеры, а остальные - только терминалы. Допустимая очередь в машинный зал - **N_3** человека. Работа за терминалом занимает **t_2** (мин), с принтером **t_3** (мин). Смоделировать работу зала в течение суток.

Данные для детерминированной модели СМО: **Δ=1/3, N_1=4, N_2=2, N_3=3, N_4=3, t_1=8, t_2=17, t_3=8.**

Данные для стохастической модели СМО: интервал **t_1** распределен экспоненциально с параметром **λ_1= 0,125, t_2, t_3** распределены по нормальному закону с параметрами **m_2=17, m_3=8, σ_2=2, σ_3=1;** возмущающим воздействием является **Δ**, которое представляет собой стационарный случайный процесс с нормальным законом распределения и интервалом разброса **[10...50].**

Варьируемые параметры: **N_1, N_2, N_3.**

Показатели работы: производительность, стоимость обслуживания зала, вероятность переполнения очереди.

Вариант №11

На ВЦ через интервалы времени **t** (мин) поступают задания длиной **N** (байт). Скорость ввода, вывода и обработки заданий - **V** (байт/мин). Задания проходят последовательно: ввод, обработку и вывод. Перед каждой операцией производится буферизация заданий в буферах **K_1**(байт), **K_2**(байт), **K_3**(байт). Задание, не вмещающееся в буфер, уничтожается. После вывода **M** заданий, все выведенные **M** заданий проверяются, и выясняется, что **Δ**(%) из них оказывается выполнено неправильно вследствие сбоев. Все неправильно выполненные задания возвращаются на ввод и проходят вне очереди. Смоделировать работу ВЦ в течение суток.

Данные для детерминированной модели СМО: **N=500, t=30, V=100, M=10, Δ=10, $К_1$=2000, $К_2$=2000, $К_3$=2000.**

Данные для стохастической модели СМО: **t** распределено по показательному закону с параметром **λ=0,03, V, N** распределены нормально с параметрами **m_v=100, $σ_v$=20, m_N = 500, $σ_N$=100;** возмущение **Δ** является стационарным случайным процессом с нормальным законом распределения и интервалом разброса **[0.. .20].**

Варьируемые параметры: **$К_1$, $К_2$, $К_3$.**

Показатели работы: количество уничтоженных заданий, средняя емкость пустующего пространства каждого из буферов.

Вариант №12

Система передачи данных обеспечивает передачу пакетов данных из пункта А в пункт С через транзитный пункт В. В пункт А пакеты поступают с интервалом **t_1**(мс). Здесь они буферизуются в накопители емкостью **E_A** пакетов и передаются в пункт В по любой из двух линий: АВ1 -за время **t_2**(мс) или АВ2 - за время **t_3**(мс). В пункте В они снова буферизуются в накопителе емкостью **E_B** пакетов и далее передаются в пункт С по любой из двух линий: ВС1 - за время **t_4** (мс) или ВС2 за время **t_5** (мс). Причем пакеты из АВ1 поступают в ВС1 , а из АВ2 - в ВС2. Чтобы не было переполнения накопителя в пункте В, при достижении очередью порогового значения **E_P** происходит подключение резервной аппаратуры и время передачи снижается для линий ВС1 и ВС2 до **t_6** (мс). При передаче пакета по любой из линий происходит **N** сбоев. Если количество сбоев превысило три, то пакет передается заново. Смоделировать прохождение через систему передачи данных 1000 пакетов.

Данные для детерминированной модели СМО: **t_1=10, t_2 =20, t_3=20, t_4=25, t_5=25, t_6=15, E_A =20, E_B = 25 , E_P = 20, N = 0.**

Данные для стохастической модели СМО: величина **t_1** распределена экспоненциально с параметром **$λ_1$=0,1; t_2, t_3, t_4, t_5, t_6** распределены нормально с параметрами **m_2=m_3=20, m_4=m_5=25, m_6=15, $σ_2$=$σ_3$=$σ_4$=$σ_5$=$σ_6$=3;** вследствие возмущений, **N** является стационарным случайным процессом с нормальным законом распределения и интервалом разброса **[0...4].**

Варьируемые параметры: $\mathbf{E_A}$, $\mathbf{E_P}$.

Показатели работы: вероятность подключения резервной аппаратуры, время работы резервной аппаратуры, средняя длина очередей в п. А и В.

Вариант №13

САПР состоит из одной ЭВМ и трех терминалов. Каждый проектировщик на своем терминале формирует задание на расчет в интерактивном режиме. Набор строки задания занимает $\mathbf{t_1}$(с). Получение ответа на строку требует $\mathbf{t_2}$(с) работы ЭВМ и $\mathbf{t_3}$(с) работы терминала. После набора **N** строк задание считается сформированным и ЭВМ решает это задание в течение $\mathbf{t_4}$(с), не реагируя на вводимые строки. Вывод результата решения занимает $\mathbf{t_5}$ (с) работы терминала. Анализ результата занимает у проектировщика $\mathbf{t_6}$ (с), после чего цикл повторяется. Смоделировать работу САПР в течение суток.

Данные для детерминированной модели СМО: $\mathbf{t_1=10}$, $\mathbf{t_2=3}$, $\mathbf{t_3=5}$; $\mathbf{t_4=10}$, $\mathbf{t_5=8}$, $\mathbf{t_6=30}$.

Данные для стохастической модели СМО: интервалы времени $\mathbf{t_1}$, $\mathbf{t_2}$, $\mathbf{t_3}$, $\mathbf{t_5}$ распределены по показательному закону с параметрами $\boldsymbol{\lambda_1=0,1}$, $\boldsymbol{\lambda_2=0,3}$, $\boldsymbol{\lambda_3=0,2}$, $\boldsymbol{\lambda_5=0,125}$, $\mathbf{t_4}$ распределено по показательному закону с параметрами $\mathbf{m_{t4}=10}$, $\boldsymbol{\sigma_4=1,5}$; возмущениями являются задержки реакции ЭВМ и проектировщика, которые являются стационарными случайными процессами с нормальными законами распределения и интервалами разброса **[8…12] и [30...60]** соответственно.

Варьируемые параметры: **N.**

Показатели работы: вероятности простоя одного и двух проектировщиков, время простоя одного и двух проектировщиков, коэффициент загрузки ЭВМ.

Вариант №14

Детали, необходимые для работы цеха, находятся на цеховом и центральном складах. На цеховом складе хранится $\mathbf{N_1}$ комплектов деталей. Через время $\mathbf{t_1}$(мин) с цехового склада в цех забирают $\mathbf{N_2}$ комплектов деталей. В случае снижения запасов цехового склада до $\mathbf{N_3}$ комплектов в течение времени $\mathbf{t_2}$(мин) формируется заявка на пополнение цехового склада $\mathbf{N_4}$ комплектами деталей, которая посылается на центральный склад, где в течение времени $\mathbf{t_3}$(мин) происходит комплектование и за время $\mathbf{t_4}$(мин) - доставка. Детали, доставленные, но не поместившиеся на цеховой склад, возвращаются обратно на центральный склад. Стоимость перевозки одной детали - **M** (руб.). Смоделировать работу системы снабжения в течение месяца.

Данные для детерминированной модели СМО: $\mathbf{t_1=t_2=t_3=t_4=60, N_1=120, N_2=20, N_3=100, N_4=80, M=10}$ **.**

Данные для стохастической модели СМО: $\mathbf{t_1}$ распределено по показательному закону с параметром $\boldsymbol{\lambda_1=0{,}016}$**,** $\mathbf{t_2, t_3, t_4}$ распределены нормально с параметрами $\mathbf{m_2=m_3=m_4=60}$**,** $\boldsymbol{\sigma_2=4, \sigma_3=3, \sigma_4=2}$**;** возмущающим параметром является число бракованных комплектов, вследствие чего $\mathbf{N_2}$ представляет стационарный случайный процесс с нормальным законом распределения и интервалом разброса **[15...25].**

Варьируемые параметры: $\mathbf{N_1, N_3, N_4}$**.**

Показатели работы: величина транспортных расходов, вероятность простоя цеха, средняя загрузка цехового склада.

Вариант №15

Специализированная вычислительная система состоит из трех процессоров и общей оперативной памяти объемом $\mathbf{N_1}$(байт). Задания, поступающие на обработку через интервалы времени $\mathbf{t_1}$(мин) и имеющие размер в $\mathbf{N_2}$(байт), перед загрузкой в оперативную память буферизуются. После трансляции первым процессором в течение $\mathbf{t_2}$(мин) объем каждого задания увеличивается на $\boldsymbol{\eta_1}$(%). После компоновки во втором процессоре, которая занимает $\mathbf{t_3}$(мин), объем каждого задания возрастает еще на $\boldsymbol{\eta_2}$(%). Скомпонованные задания поступают в третий процессор на решение, требующее $\mathbf{t_4}$ (мин), и затем покидают систему. Смоделировать работу вычислительной системы в течение суток.

Данные для детерминированной модели СМО: $\mathbf{N_1=500, N_2=100, t_1=5, t_2=3}$ **,** $\mathbf{t_3=4, t_4=5}$ **,** $\boldsymbol{\eta_1=5}$ **,** $\boldsymbol{\eta_2=10}$**.**

Данные для стохастической модели СМО: интервал $\mathbf{t_1}$ распределен показательно с параметром $\boldsymbol{\lambda_1=0{,}2}$**;** интервалы $\mathbf{t_2, t_3, t_4}$ распределены по нормальному закону с параметрами $\mathbf{m_2=3, m_3=4, m_4=5}$**,** $\boldsymbol{\sigma_2=0{,}5, \sigma_3=1, \sigma_4=1{,}5}$**;** возмущающими факторами являются $\boldsymbol{\eta_1}$ и $\boldsymbol{\eta_2}$, представляющие стационарные случайные процессы с нормальными законами распределения и интервалами разброса **[2...8] и [5...20].**

Варьируемые параметры: $\mathbf{N_1, N_2}$**.**

Показатели работы: размер очереди в буфере, коэффициент загрузки ОП и каждого из процессоров.

Вариант №16

На каждый из трех терминалов с интервалами в **t_1(с), t_2(с), t_3(с)** поступают задания длиной по **N** знаков. ЭВМ обслуживает три терминала по круговому циклическому алгоритму, представляя каждому терминалу **t_4**(с). Скорость обработки заданий на ЭВМ - **M**(знаков/с). Если в течение времени обработки задание обрабатывается полностью, то обслуживание завершается; если нет, то остаток задачи становится в специальную очередь, которая использует свободные циклы терминалов, т.е. задача обслуживается, если ни на одном терминале нет заявок. Смоделировать работу ЭВМ в течение суток.

Данные для детерминированной модели СМО: **t_1=30, t_2=30, t_3=30, t_4=30, N = 60, M = 3.**

Данные для стохастической модели СМО: интервалы **t_1, t_2, t_3** распределены показательно с параметрами **λ_1=0,03, λ_2=0,02, λ_3=0,04, N** распределена по нормальному закону с параметрами **m_N=60, σ_N=5;** возмущением является скорость обработки заданий **M**, представляющая стационарный случайный процесс с нормальным законом распределения и интервалом разброса **[1...10].**

Варьируемые параметры. **t_4, m_N.**

Показатели работы: степень загрузки ЭВМ, длина очереди неоконченных заданий, величина цикла терминала, при котором все заявки будут обслужены без специальной очереди.

Вариант №17

Вычислительная система включает три ЭВМ. В систему с периодом **t_1**(с) поступают задания, которые становятся в очередь на обработку к первой ЭВМ, где они обрабатываются в течение **t_2**(с). После этого задание поступает одновременно во вторую и третью ЭВМ. Вторая ЭВМ обрабатывает его за **t_3**(с), а третья - за **t_4**(с). Окончание обработки задания на любой из двух последних ЭВМ означает снятие её решения с той и другой машины. В свободное время 2-я и 3-я ЭВМ решают фоновые задачи. Фоновая задача обрабатывается блоками по **Δ**(с). Пока блок не обработан 2-я и 3-я ЭВМ не ставят основное задание, а сохраняют его в ОЗУ емкостью **N** (заданий). Задания, не поместившиеся в ОЗУ, уничтожаются. Смоделировать работу системы в течение часа.

Данные для детерминированной модели СМО: **t_1=t_2=30, t_3=14, t_4 =16, Δ=60, N = 2.**

Данные для стохастической модели СМО: интервал **t_1** распределен по показательному закону с параметром **λ_1=0,03**, интервалы **t_2, t_3, t_4** распределены по нормальному закону с параметрами **m_2=30, m_3=14, m_4=16, σ_2=3, σ_3=2, σ_4=2;** возмущением является **Δ**, представляющая стационарный случайный процесс с нормальным законом распределения и интервалом разброса **[40...80].**

Варьируемые параметры: **m_3, m_4, N.**

Показатели работы: степень загрузки 2-й и 3-й ЭВМ, вероятность уничтожения заданий, степень загрузки ОЗУ.

Вариант №18

К обрабатываемой ЭВМ (ЦВК) по очереди могут подключаться **N** микропроцессорных связанных контроллеров (ППС). По каналам связи в каждый ППС с периодом **T** поступает сообщение длиной **L**(байт). При заполнении буферной памяти ППС до определенного порога **R = Mμ**, где **M** (байт) - объем буферной памяти ППС, **μ**- коэффициент порога, в ЦВК выставляется запрос на обслуживание. Обслуживание начинается после выставления запроса через интервал времени **t** (с). Результатом обслуживания является передача всех сообщений из **i**-го ППС в ЦВК. При переполнении буфера ППС происходит потеря вновь приходящих сообщений. Если в ЦВК выставлены запросы от нескольких ППС, то ЦВК обслуживает их в циклическом порядке. Передача сообщений из ППС в ЦВК производится со скоростью **V** (байт/с). Смоделировать работу системы в течение суток.

Данные для детерминированной модели СМО: **N =5, T=20, L=200, t=10, μ=0,6, M=1000, V=50.**

Данные для стохастической модели СМО: период **T** распределен по показательному закону с параметром **λ=0,05,** величины **L, t** распределены по нормальному закону с параметрами **m_L = 200, σ_L=20, m_t = 10, σ_t=2;** возмущениями являются величины **M** и **N**, представляющие стационарные случайные процессы с нормальными законами распределения и интервалами разброса **[800...1200]** и **[2... 6]** соответственно.

Варьируемые параметры: **μ, V.**

Показатели работы: степень загрузки ЦВК, степень загрузки памяти ППС, процент теряемых сообщений.

Вариант №19

Автоколонна осуществляет перевозки пассажиров из пункта А в пункт В, из пункта В в пункт С и из пункта С в пункт А по кольцевому маршруту. В автоколонне есть $\mathbf{N_1}$ автобусов. Коэффициент, отражающий степень заболеваемости среди водителей - $\boldsymbol{\mu}$. На линии работает $\mathbf{N_2 = (1-\mu)N_1}$ автобусов вместимостью **P** пассажиров каждый. Время движения автобуса между пунктами А и В - $\mathbf{t_{AB}}$(мин), В и С – $\mathbf{t_{BC}}$(мин), С и А - $\mathbf{t_{CA}}$ (мин). Каждые 5 мин в каждом из пунктов появляется $\mathbf{M_1}$ пассажиров, желающих ехать одну остановку, и $\mathbf{M_2}$ пассажиров, желающих ехать две остановки. Не попавшие в очередной автобус пассажиры становятся в очередь. Смоделировать работу автоколонны в течение недели.

***Данные для детерминированной модели СМО*: $\mathbf{t_{AB}=20}$, $\mathbf{t_{BC}=30}$, $\mathbf{t_{CA}=40}$, $\mathbf{M_1=M_2=N=10}$, P=100, $\boldsymbol{\mu}$=0.**

Данные для стохастической модели СМО: интервалы $\mathbf{t_{AB}}$, $\mathbf{t_{BC}}$, $\mathbf{t_{CA}}$ распределены по нормальному закону с параметрами $\mathbf{m_{AB} = 20}$, $\mathbf{m_{BC} = 30}$, $\mathbf{m_{CA} = 40}$, $\boldsymbol{\sigma_{AB}=2}$, $\boldsymbol{\sigma_{BC}=3}$, $\boldsymbol{\sigma_{CA}=5}$; величины $\mathbf{M_1}$, $\mathbf{M_2}$ распределены по показательному закону с параметрами $\boldsymbol{\lambda_1=\lambda_2=0,1}$; возмущающим фактором является коэффициент $\boldsymbol{\mu}$, который представляет стационарный случайный процесс с нормальным законом, распределения и интервалом разброса **[0... 0,6]**.

Варьируемые параметры: **N, P** (может принимать только значения из множества **{10,25,50,75,100}**).

Показатели работы: число автобусов на линии, средняя и максимальная длина очереди на остановках.

Вариант №20

В систему диспетчеризации мультипрограммной системы с интервалом **t**(с) поступают заявки длиной **N** (байт) каждая. Заявки накапливаются в буфере емкостью **L**(байт). Обслуживание происходит квантами времени фиксированного размера **Q**(с) со скоростью **M**(байт/с). Если за отведенный квант времени заявка не обслужена полностью, она прерывается и перемещается в конец очереди заявок, ожидающих обработки, а процессор приступает к обслуживанию очередной заявки. Если же обработка заявки заканчивается за период времени меньше **Q** (с), то при условии непустой очереди начинается обслуживание следующей заявки. При переполнении очереди, вновь поступающие заявки отвергаются. Смоделировать работу системы в течение суток.

Данные для детерминированной модели СМО: $\mathbf{t_1 = 10}$ **, N = 100, Q = 10, M = 10, L = 1000.**

Данные для стохастической модели СМО: параметр **t** имеет показательное распределение с параметром $\boldsymbol{\lambda}$**=0,1**, параметр **N** имеет нормальное распределение с параметрами **m_N =100, σ_N=10;** возмущающим фактором является скорость **M,** которая представляет стационарный случайный процесс с нормальным законом распределения и интервалом разброса **[5...15].**

Варьируемые параметры: **Q, L.**

Показатели работы: среднее отношение времени, требуемое программе для обслуживания ко времени ее нахождения в очереди, количество отвергаемых заявок, производительность системы, стоимость обработки заявки.

Вариант №21

В машинный зал с интервалами времени **t_1**(мин) заходят пользователи. В зале имеется **N** ЭВМ и **M** принтеров. Время необходимое для решения задачи пользователя - **t_2**(мин). **Δ**(%) пользователей после окончания решения задачи выводят текст программы на печать (продолжительность вывода - **t_3** (мин)). Работа принтера не мешает расчетам ЭВМ. Смоделировать работу зала в течение недели.

Данные для детерминированной модели СМО: **t_1=10, t_2=25, t_3=30, Δ=30, N=4, M=2.**

Данные для стохастической модели СМО: **t_1** распределена по показательному закону с параметром **λ_1=0,1; t_2, t_3** распределены нормально с параметрами **m_2=25, m_3=30, σ_2=5, σ_3=5;** возмущением является Δ, представляющая стационарный случайный процесс с нормальным законом распределения и интервалом разброса **[5...95].**

Варьируемые параметры: **N, M.**

Показатели работы: средние длины очередей и коэффициенты загрузки ЭВМ и принтеров.

Вариант №22

ОЗУ общей емкостью 250 байт разделено на *N* сегментов, каждый из которых имеет размер **V_1, V_2...V_N**(байт). На вход вычислительной системы с интервалом времени **t_1** поступают задачи, требующие объема памяти **V_P** (байт). Программа размещается в наименьшем по объему свободном сегменте, размер которого превышает требуемый. Если такого нет, задача ждет, пока подходящий сегмент освободится. Скорость обслуживания задач **V_s** (байт/с). Каждые **t_2** происходит сбой в наибольшем по объему сегменте. Если он был занят в этот момент, то задача теряется. Сегмент восстанавливается в течение времени **t_3**, во время восстановления он недоступен. Смоделировать работу вычислительной системы в течение суток.

Данные для детерминированной модели СМО: **N=6, t_1=5, t_2=11, t_3=4, V_1=10, V_2=20, V_3=80, V_4=40, V_5=60, V_6=40, V_p=55, V_s = 10.**

Данные для стохастической Модели СМО: **t_1** и **t_2** имеют показательное распределение с параметрами **λ_1=0,2, λ_2=0,1; V_P** и **V_s** имеют нормальное распределение с параметрами **m_P=55, σ_P=10, m_s=10, σ_S=2;** возмущающим параметром является **t_3**, представляющее стационарный случайный процесс с нормальным законом распределения и интервалом разброса **[1... 10].**

Варьируемые параметры: **N, V_1…V_N.**

Показатели работы: производительность, коэффициент использования памяти, длина очереди задач.

Вариант №23

Иерархическая система управления состоит из управляющей машины верхнего уровня (УВМ) и микроконтроллера (МК), связанного с УВМ двумя каналами передачи, каждый из которых имеет буфер емкостью **M_1** (байт) и **M_2**(байт) соответственно. Скорость обмена по первому каналу – **V_1**(байт/с), по второе каналу- **V_2**(байт/с). Микроконтроллер с интервалом времени **t**(с) посылает УВМ пакеты данных длиной **N** (байт). Если оба канала свободны, то пакет передается по первому каналу, если один из каналов занят, то пакет передается по свободному каналу, если оба канала заняты, то пакет становится в очередь в буфер того из каналов, свободное пространство которого больше. Пакеты, не вошедшие в буфер, аннулируются. Смоделировать работу системы в течение суток.

Данные для детерминированной модели СМО: **M_1=1000, M_2=2000, V_1=20, V_2=10, t=5, N=200 .**

Данные для стохастической модели СМО: **t** распределена показательно с параметром **λ=0,2; N** распределена нормально с параметрами **m_N=200, σ_N=50;** возмущающими факторами являются **V_1** и **V_2**, которые представляют стационарные случайные процессы с нормальными законами распределения и интервалами разброса **[10..30]** и **[5...15]** соответственно.

Варьируемые параметры: **M_1, M_2.**

Показатели работы: коэффициент использования пространства буферов, количество аннулированных пакетов.

Вариант №24

Профессор и ассистент принимают экзамен у **M** студентов. Ассистент имеет право ставить студенту за экзамен оценки **3** и **4**, профессор **2, 3, 4** и **5**. Студенты поступают в очередь с интервалом $\mathbf{t_0}$(мин). В порядке очередности студенты подходят к ассистенту. Ассистент задает $\mathbf{n_1}$ вопросов студенту, время на ответ по $\mathbf{t_1}$(мин) на каждый вопрос (с учетом времени на формулировку вопроса). Студент с равной вероятностью может ответить на вопрос правильно или неправильно. Ответ студента оценивается по следующей шкале:

Процент правильных ответов	Балл
0-30%	2
30-50%	3
50-70%	4
70-100%	5

При получении у ассистента оценки **3** или **4** студент покидает экзамен. В противном случае студент направляется к профессору, который задает ему $\mathbf{n_2}$ вопросов со временем обдумывания по $\mathbf{t_2}$(мин) на каждый вопрос. Если студент получает у профессора оценку **2**, то он становится в конец очереди через интервал $\mathbf{2*t_0}$.

Данные для детерминированной модели СМО: $\mathbf{t_0=10,\ t_1=5,\ t_2=7,\ n_1=5,\ n_2=5,\ M=15}$.

Данные для стохастической модели СМО: время ответа студента на вопрос ассистента распределено по нормальному закону с параметрами $\mathbf{m_{t1}=5,\ \sigma_{t1}=1,}$ на вопрос профессора – с параметрами $\mathbf{m_{t2}=4}$, $\mathbf{\sigma_{t2}=1}$, время на приход распределено по экспоненциальному закону с параметром $\mathbf{\lambda_{t0}=0,1}$. Возмущающим воздействием являются паузы студента при ответе на вопрос. Возмущение – случайный процесс, нормально распределенный в интервале **[0..5]** при ответе на вопрос ассистента и в интервале **[0..7]** при ответе на вопрос профессора.

Варьируемые параметры: количество вопросов ассистента и профессора, шкала оценок.

Показатели работы: производительность преподавателей; средний балл студентов; среднее время прохождения студентом экзамена, включая его пребывание в очереди; оплата труда преподавателей (прямо пропорциональна времени работы, обратно пропорциональна времени простоя).

Вариант №25

В салоне красоты работают мастера-парикмахеры и мастера по уходу за ногтями. На прием в салон красоты соответственно формируется две очереди – на прием к парикмахеру и на прием к мастеру по уходу за ногтями. В первую очередь люди приходят через каждые $\mathbf{t_1}$(мин), во вторую – через каждые $\mathbf{t_2}$(мин). В салоне работает $\mathbf{N_1}$ парикмахера и $\mathbf{N_2}$ мастера по уходу за ногтями. Продолжительность обслуживания клиента парикмахерами составляет $\boldsymbol{\tau_1}$(мин) соответственно, а мастерами по уходу за ногтями – $\boldsymbol{\tau_2}$(мин) соответственно. Если длина очереди на прием к парикмахеру превышает **M** человек, то мастер по уходу за ногтями выступает в роли парикмахера. Смоделировать работу парикмахерской в течение рабочего дня.

Данные для детерминированной модели СМО: $\mathbf{t_1=30}$, $\mathbf{t_2=50}$, $\mathbf{M=40}$, $\boldsymbol{\tau_1=30}$, $\boldsymbol{\tau_2=70}$, $\mathbf{N_1=3}$, $\mathbf{N_2=2}$.

Данные для стохастической модели СМО: $\boldsymbol{\tau_1}$, $\boldsymbol{\tau_2}$ имеют показательное распределение с параметрами $\boldsymbol{\lambda_1=0{,}03}$, $\boldsymbol{\lambda_2=0{,}015}$; $\mathbf{t_1}$, $\mathbf{t_2}$ имеют нормальное распределение с параметрами $\boldsymbol{\sigma_{t1}=3}$, $\boldsymbol{\sigma_{t2}=5}$, $\mathbf{m_{t1}=30}$, $\mathbf{m_{t2}=50}$; **N1, N2** являются стационарными случайными процессами с нормальным законом распределения и интервалом разброса **[2..4].**

Варьируемые параметры: **M.**

Показатели работы: длина очередей; количество клиентов, обслуженных мастером по уходу за ногтями в роли парикмахера; общее количество обслуженных посетителей.

Вариант №26

Частная компания имеет в наличии 5 автобусов, совершающих рейсовые маршруты в два населенных пункта. Вместимость автобусов $\mathbf{n_1}$, $\mathbf{n_2}$, $\mathbf{n_3}$, $\mathbf{n_4}$, $\mathbf{n_5}$ соответственно. Через каждые $\mathbf{t_1}$ минут клиент покупает билет на первый рейс, а через каждые $\mathbf{t_2}$ минут – на другой. Время поездки автобуса по первому маршруту составляет $\mathbf{T_1}$ часов, а по второму – $\mathbf{T_2}$ часов. После высадки пассажиров автобус возвращается обратно. Если в населенном пункте нет свободных автобусов, пассажиры становятся в очередь. Время посадки-высадки пассажиров составляет **T** минут. Автобусы отправляются по тому маршруту, где больше очередь, или большее количество людей купило билеты (если нет очереди). Смоделировать работу автокомпании в течение 12 часов.

Данные для детерминированной модели СМО: $\mathbf{n_1=20}$, $\mathbf{n_2=30}$, $\mathbf{n_3=25}$, $\mathbf{n_4=40}$, $\mathbf{n_5=35}$, $\mathbf{t_1=1}$, $\mathbf{t_2=1{,}5}$, $\mathbf{T_1=1}$, $\mathbf{T_2=1{,}5}$, $\mathbf{T=30}$.

Данные для стохастической модели СМО: $\mathbf{t_1}$ распределено по показательному закону с параметром λ_1**=0,66;** t_2 имеет нормальное распределение с параметрами σ_{t2}**=0,3,** m_{t2}**=1,5; T** является стационарным случайным процессом с нормальным законом распределения и интервалом разброса **[25..35].**

Варьируемые параметры: T_1, T_2, n_1, n_2, n_3, n_4, n_5.

Показатели работы: длина очередей; число проделанных рейсов по двум маршрутам; общее количество перевезенных клиентов; время простоя автобусов (если таковое будет).

Вариант №27

На контрольно-пропускном пункте организации сидит охранник и проверяет входящих и выходящих из здания людей. Каждые t_1(мин) на КПП приходит один человек на вход и каждые t_2(мин) – один человек на выход. Проверка производится в течение **T**(мин). Если человек не имеет пропускного документа (Δ_1 %) или проносит/выносит из здания недопустимые предметы (Δ_2 %), то его отводят в спец. комнату до дальнейшего разбирательства, и охранник задерживается на **dt** минут. Охранник проверяет документы у той очереди, людей в которой больше. Если количество людей на вход и на выход превышает **N**, то охранник пропускает выходящих людей, стоящих в очереди. Смоделировать работу КПП в течение суток.

Данные для детерминированной модели СМО: $\Delta_1=10$, $\Delta_2=5$, $t_1=2$, $t_2=3$, **T=5, dt=15.**

Данные для стохастической модели СМО: Δ_1, Δ_2 имеют показательное распределение с параметрами $\lambda_1=0{,}1$, $\lambda_2=0{,}2$; t_1, t_2 имеют нормальное распределение с параметрами $\sigma_{t1}=0{,}5$, $\sigma_{t2}=0{,}5$, $m_{t1}=2$, $m_{t2}=3$; **T** является стационарным случайным процессом с нормальным законом распределения и интервалом разброса **[2..8].**

Варьируемые параметры: **N, dt.**

Показатели работы: длина очередей; общее время, затраченное охранником на разбирательства; количество людей, не прошедших проверку.

Вариант №28

В ГАИ посетители ставят на учет и снимают с учета машины, каждые **T**(мин) прибывает машина, причем с вероятностью **P**(%) она принадлежит инвалиду или ветерану. Прибывшая машина отправляется в бокс на проверку. В первом боксе делается первичный осмотр, на который затрачивается t_1(мин). Если машина в порядке, то водитель идет оформлять документы, а если нет, то ее направляют во второй бокс, котором проводится более тщательная проверка, на которую затрачивается $\mathbf{t_2}$ (мин) (вероятность неполадок **Δ**%). В помещении для оформления документов предназначено 3 окна. Два из них используются для сдачи старых номеров, оформления документов: первое – общая очередь (затрачивается $\mathbf{t_3}$(мин)), второе – для инвалидов и ветеранов (затрачивается $\mathbf{t_4}$(мин)). После чего водители из обеих очередей получают номера в следующем окне, на эту процедуру затрачивается $\mathbf{t_5}$(мин). Водитель возвращается в бокс, забирает машину и уезжает. Смоделировать работу ГАИ в течение недели.

Данные для детерминированной модели СМО: **$\Delta=20$, $t_1=10$, $t_2=40$, $t_3=15$, $t_4=5$, $t_5=3$, $T=2$, $P=40$.**

Данные для стохастической модели СМО: $\mathbf{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5}$ имеют показательное распределение с параметрами $\lambda_1=0{,}07$, $\lambda_2=0{,}02$, $\lambda_3=0{,}03$, $\lambda_4=0{,}05$, $\lambda_5=0{,}01$; **Δ** имеет нормальное распределение с параметрами $\sigma_\Delta=2$, $m_\Delta=20$; **T** является стационарным случайным процессом с нормальным законом распределения и интервалом разброса **[0,5..3,5].**

Варьируемые параметры: λ_2, **P.**

Показатели работы: длина очереди; общая производительность системы, время занятости второго окна.

Вариант №29

На строительстве гаражной постройки работают 3 рабочих. В течение **T** часов 1-ый использует $\mathbf{n_1}$ тонн цемента и $\mathbf{m_1}$ тонн песка, 2-й – $\mathbf{n_2}$ тонн цемента и $\mathbf{m_2}$ тонн песка, 3-й – $\mathbf{n_3}$ тонн цемента и $\mathbf{m_3}$ тонн песка. Через каждые τ_1 часов привозят **N** тонн цемента и через каждые τ_2 часов привозят **M** тонн песка. после доставки материалы складируются в 2 фургона вместимостью $\mathbf{P_1}$ и $\mathbf{P_2}$ тонн соответственно. Если фургоны полные, то привезенные материалы ссыпаются в кучи возле фургонов. Степень заболеваемости рабочих составляет **Δ**%. Смоделировать работу стройки в течение недели.

Данные для детерминированной модели СМО: **$\Delta=10$, $n_1=5$, $n_2=4$, $n_3=3$, $m_1=9$, $m_2=8$, $m_3=7$, $\tau_1=2$, $\tau_2=3$, $N=15$, $M=24$, $P_1=30$, $P_2=40$, $T=7$.**

Данные для стохастической модели СМО: $\mathbf{n_1, n_2, n_3, m_1, m_2, m_3}$ имеют показательное распределение с параметрами $\lambda_{n1}=0{,}2$, $\lambda_{n2}=0{,}25$, $\lambda_{n3}=0{,}33$, $\lambda_{m1}=0{,}025$, $\lambda_{m2}=0{,}031$, $\lambda_{m3}=0{,}14$; Δ, τ_1, τ_2 имеют нормальное распределение с параметрами $\sigma_\Delta=3$, $\sigma_{\tau1}=0{,}5$, $\sigma_{\tau2}=0{,}8$, $m_\Delta=10$, $m_{\tau1}=2$, $m_{\tau2}=3$; **T** является стационарным случайным процессом с нормальным законом распределения и интервалом разброса **[5..10].**

Варьируемые параметры: **N, M, P_1, P_2.**

Показатели работы: количество материалов, сложенных в кучу; время простоя рабочих; количество невыходов рабочих на смену.

Вариант №30

В кафе 2 официанта обслуживают 3 стола. 1-й стол рассчитан на n_1 человек, 2-й – на n_2 человек, 3-й – на n_3 человек. В кафе приходят посетители через каждые **T**(мин) в количестве **N** человек. Официант принимает заказ в течение t_1(мин). Еду готовят в течение t_2(мин). Посетители употребляют пищу в среднем за t_3(мин). Если все столики заняты, то накапливается очередь. Если очередь превышает ($n_1+n_2+n_3$) человек, то новые посетители уходят. Смоделировать работу кафе в течение суток.

Данные для детерминированной модели СМО: $n_1=5$, $n_2=7$, $n_3=10$, $t_1=5$, $t_2=30$, $t_3=50$, $N=7$, $T=10$.

Данные для стохастической модели СМО: t_1, t_2, t_3 имеют показательное распределение с параметрами $\lambda_{t1}=0{,}05$, $\lambda_{t2}=0{,}03$, $\lambda_{t3}=0{,}015$; **N** имеет нормальное распределение с параметрами $\sigma_N=2$, $m_N=7$; **T** является стационарным случайным процессом с нормальным законом распределения и интервалом разброса **[7..17].**

Варьируемые параметры: n_1, n_2, n_3.

Показатели работы: количество человек, которые ушли из кафе; количество обслуженных человек; общее время приготовления пищи и обслуживания клиентов.

Вариант №31

В минимаркете покупателей обслуживают 4 кассы. Покупатели приходят в магазин с интервалом T_1(мин) в количестве **N** человек. Каждый покупатель совершает покупки в течение T_2(мин), затем становится в очередь на кассу. Продавец на 1-й кассе обслуживает покупателя за t_1(мин) и прибыль в кассу составляет, в среднем, s_1 (руб.), на 2-й – за t_2(мин), и прибыль – s_2(руб.), на 3-й – за t_3(мин), и прибыль – s_3(руб), на 4-й – за t_4(мин), и прибыль – s_4(руб.). Смоделировать работу магазина в течение суток.

Данные для детерминированной модели СМО: $s_1=500$, $s_2=700$, $s_3=100$, $s_4=400$, $t_1=5$, $t_2=10$, $t_3=8$, $t_4=7$, $N=20$, $T_1=10$, $T_2=40$.

Данные для стохастической модели СМО: t_1, t_2, t_3, t_4 имеют показательное распределение с параметрами $\lambda_{t1}=0{,}2$, $\lambda_{t2}=0{,}1$, λ

$_{t3}$**=0,125, λ_{t4}=0,037; s_1, s_2, s_3, s_4** имеют нормальное распределение с параметрами **σ_{s1}=50, m_{s1}=500, σ_{s2}=70, m_{s2}=700, σ_{s3}=10, m_{s3}=100, σ_{s4}=40, m_{s4}=400; N** является стационарным случайным процессом с нормальным законом распределения и интервалом разброса **[15..25].**

Варьируемые параметры: **T_1, T_2.**

Показатели работы: длина очереди на каждой кассе; средняя время, затрачиваемое посетителем на совершение покупок; общая прибыль магазина.

Вариант №32

По выходным люди ходят кататься на ледовый каток. Каждые **T**(мин) в здание прибывает по **N** человек, **N_1** из них имеют свои коньки. На покупку билетов посетители затрачивают **t_1**(мин), а на оплату проката коньков – **t_2**(мин). Стоимость билета – **s_1**(руб./час), стоимость проката коньков – **s_2**(руб./час). Количество коньков в прокатном пункте – **M**. Сеанс длится **t_3** (мин). Каждые **30** мин **Δ(%)** посетителей покидают каток из-за усталости или повреждений. Вместимость ледовой арены **P** человек. Смоделировать работу ледового катка в течение суток.

Данные для детерминированной модели СМО: **s_1=50, s_2=70, t_1=5, t_2=10, t_3=60, N=20, N_1=7, T=10, P=200, M=100, Δ=10.**

Данные для стохастической модели СМО: **t_1, t_2, T** имеют показательное распределение с параметрами **λ_{t1}=0,2, λ_{t2}=0,01, λ_T=0,1; N, N_1** имеют нормальное распределение с параметрами **σ_N=2, m_N=20, σ_{N1}=1, m_{N1}=7; Δ** является стационарным случайным процессом с нормальным законом распределения и интервалом разброса **[5..15].**

Варьируемые параметры: **s_1, s_2, M, t_3.**

Показатели работы: производительность системы; общая прибыль катка, средняя длина очереди на каток.

Приложение 2
Типовые распределения вероятностей

Таблица 1

Распределение Колмогорова $p(\lambda)=1-\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k e^{-k^2\lambda^2}$

λ	$p(\lambda)$	λ	$p(\lambda)$	λ	$p(\lambda)$
0,0	1,000	0,7	0,711	1,4	0,040
0,1	1,000	0,8	0,544	1,5	0,022
0,2	1,000	0,9	0,393	1,6	0,012
0,3	1,000	1,0	0,270	1,7	0,006
0,4	0,997	1,1	0,178	1,8	0,003
0,5	0,964	1,2	0,112	1,9	0,002
0,6	0,864	1,3	0,068	2,0	0,001

Таблица 2

$F_{\beta_1,\beta_2,\alpha}$ **распределения Фишера для** $\alpha=0{,}05$

β_1	β_2						
	10	20	30	40	50	100	∞
10	2,97	2,77	2,70	2,67	2,64	2,59	2,54
15	2,55	2,33	2,25	2,21	2,18	2,12	2,07
20	2,35	2,12	2,04	1,99	1.96	1,90	1,84
30	2,16	1,93	1,84	1,79	1,76	1,69	1,62
40	2,07	1,84	1,74	1,69	1,66	1,59	1,51
50	2,02	1,78	1,69	1,63	1,60	1,52	1,44
100	1,92	1,68	1,57	1,51	1,48	1,39	1,28
∞	1,83	1,57	1,46	1,40	1,35	1,24	1,00

Таблица 3

Значения $\chi^2_{\beta,p}$ распределения χ^2

β	*p*												
	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0,000	0,001	0,004	0,016	0,064	0,148	0,455	1,074	1,642	2,710	3,840	5,410	6,640
2	0,020	0,040	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386	2,410	3,220	4,600	5,990	7,820	9,210
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424	2,370	3,660	4,640	6,250	7,820	9,840	11,34
4	0,297	0,429	0,711	1,064	1,649	2,200	3,360	4,880	5,990	7,780	9,490	11,67	13,28
5	0,554	0,752	1,145	1,610	2,340	3,000	4,350	6,060	7,290	9,240	11,07	13,39	15,09
6	0,872	1,134	1,635	2,200	3,070	3,830	5,350	7,230	8,560	10,64	12,59	15,03	16,81
7	1,239	1,564	2,170	2,830	3,820	4,670	6,350	8,380	9,800	12,02	14,07	16,62	18,48
8	1,646	2,030	2,730	3,490	4,590	5,530	7,340	9,520	11,30	13,36	15,51	18,17	20,10
9	2,090	2,530	3,320	4,170	5,380	6,390	8,340	10,66	12,24	14,68	16,92	19,68	21,70
10	2,560	3,060	3,940	4,860	6,280	7,270	9,340	11,78	13,44	15,99	18,31	21,20	23,20
11	3,050	3,610	4,580	5,580	6,990	8,150	10,34	12,90	14,63	17,28	19,68	22,60	24,70
12	3,570	4,180	5,230	6,300	7,810	9,030	11,34	14,01	15,81	18,55	21,00	24,10	26,20
13	4,110	4,760	5,890	7,040	8,630	9,930	12,34	15,12	16,98	19,81	22,40	25,50	27,70
14	4,660	5,370	6,570	7,790	9,470	10,82	13,34	16,22	18,15	21,10	23,70	26,90	29,10
15	5,230	5,980	7,260	8,550	10,31	11,72	14,34	17,32	19,31	22,30	25,00	28,30	30,60

Окончание табл. 3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
16	5,810	6,610	7,960	9,310	11,15	12,62	15,34	18,42	20,50	23,50	26,30	29,60	32,00
17	6,410	7,260	8,670	10,08	12,00	13,53	16,34	19,51	21,60	24,80	27,60	31,00	33,40
18	7,020	7,910	9,390	10,86	12,86	14,44	17,34	20,60	22,80	26,00	28,90	32,30	34,80
19	7,630	8,570	10,11	11,65	13,72	15,35	18,34	21,70	23,90	27,20	30,10	33,70	36,20
20	8,260	9,240	10,85	12,44	14,58	16,27	19,34	22,80	25,00	28,40	31,40	35,00	37,60
21	8,900	9,920	11,59	13,24	15,44	17,18	20,30	29,30	26,20	29,60	32,70	36,30	38,90
22	9,540	10,60	12,34	14,04	16,31	18,10	21,30	24,90	27,30	30,80	33,90	37,70	40,30
23	10,20	11,29	13,09	14,85	17,19	19,02	22,30	26,00	28,40	32,00	35,20	39,00	41,60
24	10,86	11,99	13,85	15,66	18,06	19,94	23,30	27,10	29,60	33,20	36,40	40,30	43,00
25	11,52	12,70	14,61	16,47	18,94	20,90	24,30	28,20	30,70	34,40	37,70	41,70	44,30
26	12,20	13,41	15,38	17,29	19,82	21,80	25,30	29,20	31,80	35,60	38,90	42,90	45,60
27	12,88	14,12	16,15	18,11	20,70	22,70	26,30	30,30	32,90	36,70	40,10	44,10	47,00
28	13,56	14,85	16,93	18,94	21,60	23,60	27,30	31,40	34,00	37,90	41,30	45,40	48,30
29	14,26	15,57	17,71	19,77	22,50	24,60	28,30	32,50	35,10	39,10	42,60	46,70	49,60
30	14,95	16,31	18,49	20,60	23,40	25,50	29,30	33,50	36,20	40,30	43,80	48,00	50,90

Таблица 4

Значения $t_{\beta,p}$ распределения Стьюдента

β	*p*												
	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,001
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,080	6,310	12,71	31,80	63,70	636,6
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,336	1,886	2,920	4,300	6,960	9,920	31,60
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,350	3,180	4,540	5,840	12,94
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,553	2,130	2,770	3,750	4,600	8,610
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,020	2,570	3,360	4,030	6,860
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,450	3,140	3,710	5,960
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,360	3,000	3,500	5,400
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,310	2,900	3,360	5,040
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,260	2,820	3,250	4,780
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,230	2,760	3,170	4,590
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,200	2,720	3,110	4,490
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,180	2,680	3,060	4,320
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,010	4,220
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,140	2,620	2,980	4,140
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,130	2,600	2,950	4,070
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,580	2,920	4,020

Окончание табл. 4

β	*p*												
	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,001
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,570	2,900	3,960
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,729	2,100	2,550	2,880	3,920
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,725	2,090	2,540	2,860	3,880
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,721	2,090	2,530	2,840	3,850
21	0,127	0,257	0,390	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,717	2,080	2,520	2,830	3,820
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858	1,061	1,321	1,714	2,070	2,510	2,820	3,790
23	0,127	0,256	0,390	0,532 0,531	0,685	0,858	1,060	1,319	1,711	2,070	2,500	2,810	3,770
24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,857	1,059	1,318	1,708	2,060	2,490	2,800	3,740
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,706	2,060	2,480	2,790	3,720
26	0,127	0,256	0,389	0,530	0,684	0,856	1,057	1,314	1,703	2,050	2,470	2,780	3,710
27	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,050	2,470	2,770	3,690
28	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,460	2,760	3,670
29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,460	2,756	3,660
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,040	2,457	2,750	3,646
40	0,126	0,255	0,388	0,529	0,681	0,851	1,050	1,303	1,684	2,020	2,420	2,700	3,550
60	0,126	0,254	0,387	0,527	0,679	0,848	1,046	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
120	0,126	0,254	0,386	0,526	0,677	0,845	1,041	1,289	1,658	1,980	2,360	2,620	3,370
∞	0,126	0,253	0,385	0,524	0,674	0,842	1,036	1,282	1,645	1,960	2,330	2,580	3,290

Библиографический список

1. Морозов, В. К. Моделирование информационных и динамических систем : учеб. пособие / В. К. Морозов, Г. Н. Рогачев. – М. : Академия, 2011. – 378 с.
2. Кудряшов, В. С. Моделирование систем [Электронный ресурс] : учебное пособие / Кудряшов В. С. - Воронеж : Воронежский государственный университет инженерных технологий, 2012. - 208 с. Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/27320.html
3. Аверченков, В. И. Основы математического моделирования технических систем [Электронный ресурс] : учебное пособие / Аверченков В. И. - Брянск : Брянский государственный технический университет, 2012. - 271 с. Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/7003.html
4. Шелухин, О. И. Моделирование информационных систем [Электронный ресурс] : учебное пособие / Шелухин О. И. - Москва : Горячая линия - Телеком, 2012. - 536 с. Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/12002.html
5. Афонин, В. В. Моделирование систем [Электронный ресурс] : учебное пособие / Афонин В. В. - Москва : Интернет-Университет Информационных Технологий (ИНТУИТ), 2016. - 231 с. Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/52179.html
6. MIT OpenCourseWare. Introduction to Modeling and Simulation [Электронный ресурс]. – Массачусетский технологический институт. Режим доступа: http://ocw.mit.edu/courses/materials-science-and-engineering/3-021j-introduction-to-modeling-and-simulation-spring-2012
7. Советов, Б.Я. Моделирование систем. Учебник для вузов (5-е изд.). - М.: Высшая школа, 2007. – 343 с.

Содержание

Иванов Игорь Владимирович
Косоногова Марина Александровна

Моделирование систем и процессов

Лабораторный практикум

Подписано в печать Формат 60x84/16. Усл. печ. л. 3,9. Уч.-изд.л. 4,2.
Тираж Заказ Цена
Отпечатано в Белгородском государственном технологическом университете
им. В.Г. Шухова
308012, г.Белгород, ул.Костюкова, 46